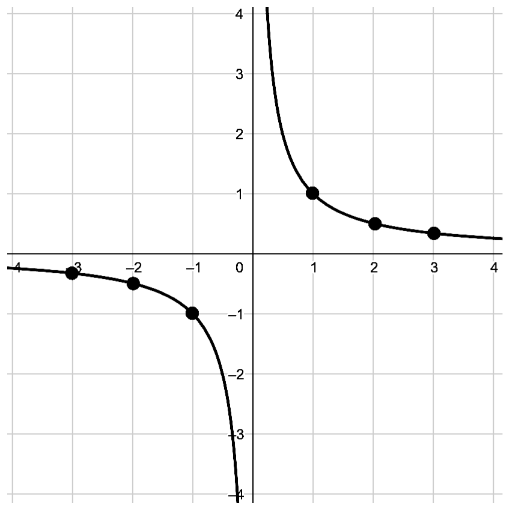
Fonction inverse

I Rappels

Définition 1
*La **fonction inverse** f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par* $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$



x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$0{,}5$	$\frac{1}{3}$

Propriété 1
La courbe représentative de la fonction inverse est applée **hyperbole** de centre O et est **symétrique par rapport à l'origine du repère**

II Sens de variation

Propriété 2
La dérivée de la fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\boldsymbol{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$

Propriété 3
La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

Démonstration

III Comportement aux bornes de l'ensemble de définition

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$, son ensemble de définition peut donc s'écrire $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

Il y a donc 4 bornes de son ensemble de définition :
$-\infty$
0 par valeurs négatives (noté 0^-)
0 par valeurs positives (noté 0^+)
et $+\infty$

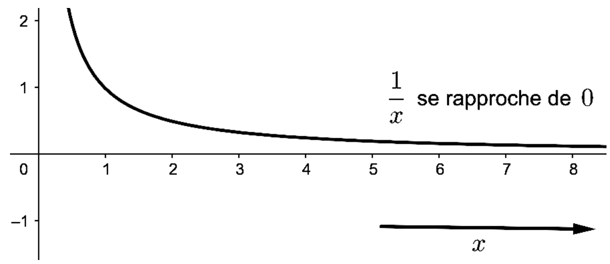
1) Quand x tend vers $+\infty$

On s'intéresse aux valeurs de $\frac{1}{x}$ lorsque x devient de plus en plus grand (on dit que x tend vers $+\infty$)

x	10	20	100	1 000	2 000	…	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0,1	0,05	0,01	0,001	0,0005	…	0

On constate que $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus grand. On dit que la limite de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à 0 et on note : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0}$

Graphiquement, pour des valeurs de x de plus en plus grandes, la courbe de $\frac{1}{x}$ se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses



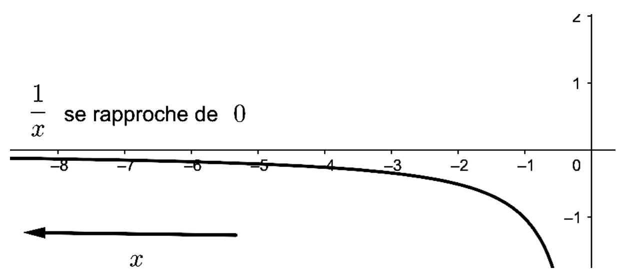
2) Quand x tend vers $-\infty$

On s'intéresse aux valeurs de $\frac{1}{x}$ lorsque x devient de plus en plus grand par valeurs négatives (on dit que x tend vers $-\infty$)

x	-10	-20	-100	$-1\,000$	$-2\,000$	…	$-\infty$
$\frac{1}{x}$	$-0,1$	$-0,05$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0005$	…	0

On constate que $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus "grand dans les négatifs". On dit que la limite de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à 0 et on note : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0}$

Graphiquement, pour des valeurs de x de plus en plus "grandes dans les négatifs", la courbe de $\frac{1}{x}$ se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses



Propriété 4
L'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction inverse en $+\infty$ et en $-\infty$

L'image de 0 n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $\frac{1}{x}$ au voisinage de 0

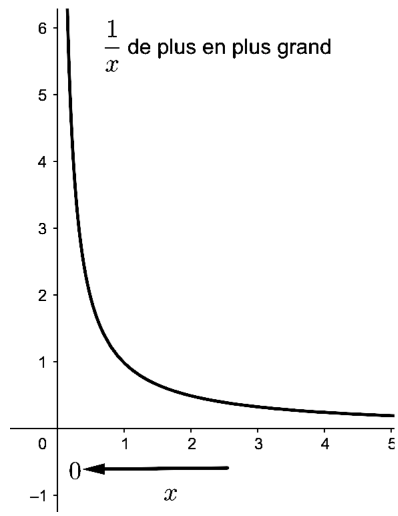
3) Quand x tend vers 0 par valeurs positives

On s'intéresse aux valeurs de $\frac{1}{x}$ lorsque x se rapproche de 0 par valeurs positives (on dit que x tend vers 0^+)

x	10	1	0,1	0,01	0,001	…	0
$\frac{1}{x}$	0,1	1	10	100	1 000	…	$+\infty$

On constate que $\frac{1}{x}$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0 par valeurs positives On dit que la limite de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0^+ est égale à $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Graphiquement, pour des valeurs de x positives de plus en plus proches de 0, la courbe de $\frac{1}{x}$ se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées



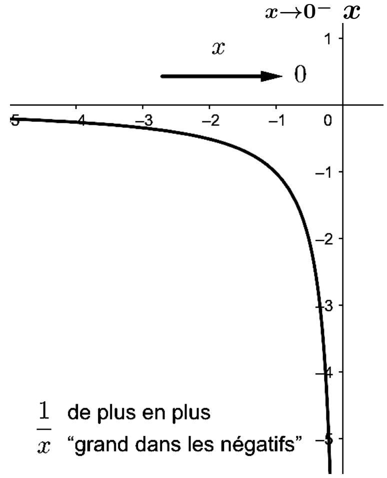
4) Quand x tend vers 0 par valeurs négatives

On s'intéresse aux valeurs de $\frac{1}{x}$ lorsque x se rapproche de 0 par valeurs négatives (on dit que x tend vers 0^-)

x	-10	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	…	0
$\frac{1}{x}$	$-0{,}1$	-1	-10	-100	$-1\,000$	…	$-\infty$

On constate que $\frac{1}{x}$ devient de plus en plus "grand dans les négatifs" lorsque x se rapproche de 0 par valeurs négatives. On dit que la limite de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0^- est égale à $-\infty$ et on note : $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Graphiquement, pour des valeurs de x négatives de plus en plus proches de 0, la courbe de $\frac{1}{x}$ se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées



Propriété 5
L'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe de la fonction inverse

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur R^* par $f(x) = 4 - 6x - \dfrac{6}{x}$

1) Calculer la dérivée f' de la fonction f

2) Déterminer le signe de f' en fonction de x

3) Dresser la tableau de variations de f