Exercice 1. Logarithme décimal

Donner le logarithme décimal des nombres suivants sans utiliser la calculatrice.

1. 100
2. 1 000
3. 1 000 000
4. 10 000

Solution :

1. $100 = 10^2$, donc $\log(100) = 2$.
2. $1\ 000 = 10^3$, donc $\log(1\ 000) = 3$.
3. $1\ 000\ 000 = 10^6$, donc $\log(1\ 000\ 000) = 6$.
4. $10\ 000 = 10^4$, donc $\log(10\ 000) = 4$.

Exercice 2.

Donner le logarithme décimal des nombres suivants sans utiliser la calculatrice.

1. 0,1
2. 0,0001
3. 0,001
4. 0,01

Solution :

1. $0{,}1 = 10^{-1}$, donc $\log(0{,}1) = -1$.
2. $0{,}000\ 1 = 10^{-4}$, donc $\log(0{,}000\ 1) = -4$.
3. $0{,}001 = 10^{-3}$, donc $\log(0{,}001) = -3$.
4. $0{,}01 = 10^{-2}$, donc $\log(0{,}01) = -2$.

Exercice 3.

Compléter le tableau suivant sans utiliser la calculatrice :

x	0,1	1	100	0,001	0,00001
$\log(x)$	-1	0	2	-3	-5

Exercice 4. Comparaison

Comparer dans chacun des cas les nombres suivants, sans utliser la calculatrice :

1. $\log(0{,}03)$ et $\log(0{,}004)$
2. $\log(0{,}25)$ et $\log(0{,}205)$
3. $\log(0{,}051)$ et $\log(0{,}0051)$
4. $\log\left(\frac{6}{11}\right)$ et $\log\left(\frac{8}{11}\right)$

Solution :

1. $0{,}03 > 0{,}004$ donc $\log(0{,}03) > \log(0{,}004)$.
2. $0{,}25 > 0{,}205$ donc $\log(0{,}25) > \log(0{,}205)$.
3. $0{,}051 > 0{,}0051$ donc $\log(0{,}051) > \log(0{,}0051)$
4. $\frac{6}{11} < \frac{8}{11}$ donc $\log\left(\frac{6}{11}\right) < \log\left(\frac{8}{11}\right)$.

Exercice 5. Signe du logarithme décimal

Donner le signe des nombres suivants, en les comparant avec $\log(1)$:

1. $\log(0{,}015)$
2. $\log(1{,}001)$
3. $\log(0{,}9999)$
4. $\log(100 \times 10^{-3})$

Solution :

1. $\log(0{,}015) < \log(1)$ donc $\log(0{,}015) < 0$.
2. $\log(1{,}001) > \log(1)$ donc $\log(1{,}001) > 0$.
3. $\log(0{,}9999) < \log(1)$ donc $\log(0{,}9999) < 0$.
4. $\log(100 \times 10^{-3}) = \log(0{,}1) < \log(1)$. Donc $\log(100 \times 10^{-3}) < 0$.

Exercice 6. Évaluer un logarithme "à la louche"

Dans chacun des cas, encadrer le nombre donné par deux entiers relatifs successifs, sans utiliser la calculatrice.

1. $\log(8{,}5)$
2. $\log(0{,}03)$
3. $\log(0{,}25)$
4. $\log(3\ 420)$

Solution :

1. $1 < 8{,}5 < 10$ donc $0 < \log(8{,}5) < 1$.
2. $0{,}01 < 0{,}03 < 0{,}1$ donc $-2 < \log(0{,}03) < -1$.
3. $0{,}1 < 0{,}25 < 1$ donc $-1 < \log(0{,}25) < 0$.
4. $1\ 000 < 3420 < 10\ 000$ donc $3 < \log(3420) < 4$.

Exercice 7. Manipuler des expressions avec logarithme

Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(2)$.

1. $\log(8 \times 10^3) = \log(8) + \log(10^3) = \log(2^3) + 3 = 3\log(2) + 3$.
2. $\log(1600) = \log(16 \times 100) = \log(16) + \log(100) = \log(2^4) + \log(10^2) = 4\log(2) + 2$
3. $\log(\frac{4}{10^5}) = \log(4) - \log(10^5) = \log(2^2) - 5 = 2\log(2) - 5$
4. $\log(0{,}32) = \log(\frac{32}{100}) = \log(32) - \log(100) = \log(2^5) - \log(10^2) = 5\log(2) - 2$

Exercice 8.

Écrire les expression suivantes en fonction de $\log(a)$.

1. $\log(a^2 \times a^3) = \log(a^2) + \log(a^3) = 2\log(a) + 3\log(a)$
2. $\log(\frac{a^7}{a^3}) = \log(a^7) - \log(a^3) = 7\log(a) - 3\log(a) = 4\log(a)$
3. $\log(\frac{1}{a^3}) = -\log(a^3) = -3\log(a)$
4. $\log(\frac{a^2}{a^8}) = \log(a^2) - \log(a^8) = 2\log(a) - 8\log(a) = -6\log(a)$

Exercice 9.

Exprimer les expressions suivantes à l'aide d'un seul log.

1. $\log(25) + \log(2) = \log(25 \times 2) = \log(50) = \log(5 \times 10) = \log(5) + \log(10) = \log(5) + 1$
2. $\log(27) - \log(3) = \log(\frac{27}{3}) = \log(9) = \log(3^2) = 2\log(3)$
3. $\log(4) - \log(8) = \log(\frac{4}{8}) = \log(\frac{1}{2}) = -\log(2)$
4. $\log(100) + \log(0{,}2) = 2 + \log(\frac{2}{10}) = 2 + \log(2) - \log(10) = 2 + \log(2) - 1 = 1 + \log(2)$

Exercice 10. Résolution d'équations du type $a^x = b$ ....

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2^x = 5$
2. $3^x = 10$
3. $5^{x+1} = 25$
4. $2^x = -1$
5. $5^x = 10$
6. $3^x = 0$
7. $2 \times 3^x = 20$
8. $10 \times 4^x = 100$

Solution :

1.

$$\begin{aligned} 2^x = 5 &\Leftrightarrow \log(2^x) = \log(5) \\ &\Leftrightarrow x\log(2) = \log(5) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\log(5)}{\log(2)} \end{aligned}$$

Rappel : lorsque l'on résoud une équation ou une inéquation, on attend en dernier lieu l'ensemble des solutions, que l'on note en général S. Ici :

$$S = \left\{\frac{\log(5)}{\log(2)}\right\}$$

À titre indicatif : $\frac{\log(5)}{\log(2)} \approx 2{,}32$.
Les accolades servent à indiquer un ensemble formé d'une ou plusieurs valeurs (à ne pas confondre avec des parenthèses ou des crochets, chaque notation ayant sa propre signification).

2.

$$\begin{aligned} 3^x = 10 &\Leftrightarrow \log(3^x) = \log(10) \\ &\Leftrightarrow x\log(3) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\log(3)} \end{aligned}$$

$$S = \left\{\frac{1}{\log(3)}\right\}$$

À titre indicatif : $\frac{1}{\log(3)} \approx 2{,}1$.

3.

$$\begin{aligned} 5^{x+1} = 25 &\Leftrightarrow \log(5^{x+1}) = \log(25) \\ &\Leftrightarrow (x+1)\log(5) = \log(5^2) \\ &\Leftrightarrow (x+1)\log(5) = 2\log(5) \\ &\Leftrightarrow x+1 = \frac{2\log(5)}{\log(5)} \\ &\Leftrightarrow x+1 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$S = \{1\}$$

4. Pour tout réel x, $2^x > 0$, donc l'équation $2^x = -1$ n'a pas de solution réelle.

$$S = \emptyset$$

5.

$$\begin{aligned} 5^x = 10 &\Leftrightarrow \log(5^x) = \log(10) \\ &\Leftrightarrow x\log(5) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\log(5)} \end{aligned}$$

$S = \left\{\frac{1}{\log(5)}\right\}$. À titre indicatif : $\frac{1}{\log(5)} \approx 1{,}43$.

6. Pour tout réel x, $3^x \neq 0$. Donc l'équation $3^x = 0$ n'a pas de solution réelle.

$$S = \emptyset$$

7.

$$\begin{aligned} 2 \times 3^x = 20 &\Leftrightarrow 3^x = \frac{20}{2} \\ &\Leftrightarrow 3^x = 10 \end{aligned}$$

On retrouve l'équation de la question 2. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble $S = \left\{\frac{1}{\log(3)}\right\}$.

8.

$$\begin{aligned} 10 \times 4^x = 100 &\Leftrightarrow 4^x = 10 \\ &\Leftrightarrow \log(4^x) = \log(10) \\ &\Leftrightarrow x\log(4) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\log(4)} \end{aligned}$$

$$S = \left\{\frac{1}{\log(4)}\right\}$$

À titre indicatif : $\frac{1}{\log(4)} \approx 1{,}66$.

Exercice 11. Résolution d'inéquations du type $a^x > b$ ....

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $5^x > 1$
2. $2^x \leq 1$
3. $4^x \leq 10$
4. $0{,}8^x > 100$
5. $150 \times 1{,}3^x \geq 400$
6. $4 \times 2^x \leq 16$
7. $5 \times 0{,}7^x \geq 25$
8. $125\ 000 \times 0{,}6^x \leq 50\ 000$

Solution :

1.

$$\begin{aligned} 5^x > 1 &\Leftrightarrow \log(5^x) > \log(1) \\ &\Leftrightarrow x\log(5) > 0 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{0}{\log(5)} \\ &\Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

$$S =]0;+\infty[$$

Rappel : les crochets servent à indiquer un intervalle. Ici l'intervalle représente toutes les valeurs comprises entre 0 (on tourne le crochet vers l'extérieur pour montrer que 0 est exclus, on dit alors que le crochet est "ouvert") et $+\infty$.

2.

$$\begin{aligned} 2^x \leq 1 &\Leftrightarrow \log(2^x) \leq \log(1) \\ &\Leftrightarrow x\log(2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{0}{\log(2)} \\ &\Leftrightarrow x \leq 0 \end{aligned}$$

$$S =]-\infty;0]$$

Remarque : cette fois-ci le crochet est "fermé" en 0 pour indiquer que 0 fait partie des solutions.

3.

$$\begin{aligned} 4^x \leq 10 &\Leftrightarrow \log(4^x) \leq \log(10) \\ &\Leftrightarrow x\log(4) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\log(4)} \end{aligned}$$

$$\left]-\infty;\frac{1}{\log(4)}\right]$$

À titre indicatif : $\frac{1}{\log(4)} \approx 1,66$.

4.

$$\begin{aligned} 0,8^x > 100 &\Leftrightarrow \log(0,8^x) > \log(100) \\ &\Leftrightarrow x\log(0,8) > 2 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{2}{\log(0,8)} \end{aligned}$$

Attention ! On change le sens de l'inéquation, car 0,8 étant compris entre 0 et 1, on a $\log(0,8) < 0$! Il faut toujours faire attention à ça lors de la résolution d'inéquation faisant intervenir un logarithme.

5.

$$\begin{aligned} 150 \times 1,3^x \geq 400 &\Leftrightarrow 1,3^x \geq \frac{400}{150} \\ &\Leftrightarrow 1,3^x \geq \frac{8}{3} \\ &\Leftrightarrow \log(1,3^x) \geq \log(\frac{8}{3}) \\ &\Leftrightarrow x\log(1,3) \geq \log(\frac{8}{3}) \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{\log(\frac{8}{3})}{\log(1,3)} \end{aligned}$$

$$S = \left[\frac{\log(\frac{8}{3})}{\log(1,3)};+\infty\right[$$

À titre indicatif : $\frac{\log(\frac{8}{3})}{\log(1,3)} \approx 3,74$.

6.

$$\begin{aligned} 4 \times 2^x \leq 16 &\Leftrightarrow 2^x \leq \frac{16}{4} \\ &\Leftrightarrow 2^x \leq 4 \\ &\Leftrightarrow \log(2^x) \leq \log(4) \\ &\Leftrightarrow x\log(2) \leq \log(2^2) \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{2\log(2)}{\log(2)} \\ &\Leftrightarrow x \leq 2 \end{aligned}$$

$$S =]-\infty;2]$$

7.

$$\begin{aligned} 5 \times 0,7^x \geq 25 &\Leftrightarrow 0,7^x \geq \frac{25}{5} \\ &\Leftrightarrow 0,7^x \geq 5 \\ &\Leftrightarrow \log(0,7^x) \geq \log(5) \\ &\Leftrightarrow x\log(0,7) \geq \log(5) \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{\log(5)}{\log(0,7)} \end{aligned}$$

$$S = \left]-\infty;\frac{\log(5)}{\log(0,7)}\right]$$

À titre indicatif : $\frac{\log(5)}{\log(0,7)} \approx -4,51$.

8.

$$\begin{aligned} 125\,000 \times 0{,}6^x \leq 50\,000 &\Leftrightarrow 0{,}6^x \leq \frac{50\,000}{125\,000} \\ &\Leftrightarrow 0{,}6^x \leq 0{,}4 \\ &\Leftrightarrow \log(0{,}6^x) \leq \log(0{,}4) \\ &\Leftrightarrow x\log(0{,}6) \leq \log(0{,}4) \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{\log(0{,}4)}{\log(0{,}6)} \end{aligned}$$

$$S = \left[\frac{\log(0{,}4)}{\log(0{,}6)};+\infty\right[$$

À titre indicatif : $\frac{\log(0{,}4)}{\log(0{,}6)} \approx 1{,}79$.

Exercice 12. ....

Le marché de la musique française enregistrée se divise en deux grands domaines : le marché physique (supports matériels comme les vyniles et les CD) et le marché dématérialisé (téléchargements, streaming). On s'intéresse ici au marché physique. En 2018, le montant des ventes correspondant au marché physique s'élevait à 256 millions d'euros. On suppose que chaque année à partir de 2018, le marché physique connaîtra une baisse de 20%.
On note u_n le montant en millions d'euros des ventes en France correspondant au marché physique de l'année $2018+n$. Ainsi : $u_0 = 256$.

1. (a) Calculer u_1.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8.
2. Dans la feuille de calcul d'un tableur, on souhaite déterminer les premiers termes de la suite (u_n).
   (a) Quelle formule peut-on écrire en C3 qui par recopie vers le bas donnera le contenu des cellules suivantes ?

	A	B	C
1	**Année**	**Rang n**	u_n
2	2018	0	256
3	2019	1	
4	2020	2	
5	2021	3	

   (b) Quelle est l'expression de u_n en fonction de n ?
   (c) D'après ce modèle, en quelle année prévoit-on un montant du marché inférieur à 50 millions d'euros ?

Solution :

1. (a) $CM = 1 - \frac{20}{100} = 1{,}8$. $u_1 = u_0 \times 0{,}8 = 256 \times 0{,}8 = 204{,}8$.
   (b) Comme indiqué dans la question précédente, pour effectuer une baisse de 20%, il faut multiplier par 0,8. On calcule les termes successifs de la suite (u_n) en multipliant toujours par 0,8, ce qui caractérise une suite géométrique.
2. (a) On peut écrire : "= $C1 * 0.8$".
   (b) $u_n = u_0 \times q^n = 256 \times 0{,}8^n$.
   (c) On cherche à résoudre l'inéquation $u_n \leq 50$.

$$\begin{aligned} u_n \leq 50 &\Leftrightarrow 256 \times 0{,}8^n \leq 50 \\ &\Leftrightarrow 0{,}8^n \leq \frac{50}{256} \\ &\Leftrightarrow 0{,}8^n \leq \frac{25}{128} \\ &\Leftrightarrow \log(0{,}8^n) \leq \log(\frac{25}{128}) \\ &\Leftrightarrow n\log(0{,}8) \leq \log(\frac{25}{128}) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\log(\frac{25}{128})}{\log(0{,}8)} \end{aligned}$$

Or : $\frac{\log(\frac{25}{128})}{\log(0{,}8)} \approx 7{,}32$. $2018+8 = 2026$, donc d'après ce modèle, le montant du marché physique sera inférieur à 50 millions d'euros en 2026.

Exercice 13. ....

Un cabinet d'orthophonie fait le bilan de son activité. On s'intéresse au nombre de séances d'orthophonie réalisées chaque trimestre au sein du cabinet. À partir du premier trimestre 2019, le nombre de séances d'orthophonie augmente au rythme de 3 % par trimestre.
On modélise, à l'aide d'une suite géométrique (s_n), le nombre trimestriel de séances réalisées par le cabinet, l'entier n désignant le nombre de trimestres écoulés depuis le début de l'année 2019.
On note $s_1 = 598$.

1. Justifier que la raison de la suite géométrique (s_n) est égale à 1,03.
2. Calculer dans le cadre de cette modélisation le nombre de séances réalisées au cours du premier trimestre 2020.
3. Justifier que $s_n = 598 \times 1{,}03^{n-1}$.
4. Les orthophonistes estiment qu'ils devront recruter un nouveau collègue lorsque le nombre trimestriel de séances dépassera 800. Selon ce modèle, déterminer le trimestre (et l'année) à partir duquel il faudra faire ce recrutement.

Solution :

1. Pour calculer le terme suivant, on effectue une augmentation de 3%, ce qui revient à multiplier par 1,03.

2. Il y a 4 trimestres par an, donc le premier trimestre de 2020, correspond au 5ème trimestre depuis le début de l'année 2019, soit 4 trimestres après le 1er.
   On effectue donc 4 augmentations de 3%.
   $598 \times 1{,}03^4 \approx 673$.
3. (s_n) est une suite géométrique de premier terme $s_1 = 598$ et de raison $q = 1{,}03$.
   Ainsi :
$$\begin{aligned} s_n &= s_1 \times q^{n-1} \\ &= 598 \times 1{,}03^{n-1} \end{aligned}$$
4. On cherche à résoudre $s_n \geq 800$.
$$\begin{aligned} s_n \geq 800 &\Leftrightarrow 598 \times 1{,}03^{n-1} \geq 800 \\ &\Leftrightarrow 1{,}03^{n-1} \geq \frac{800}{598} \\ &\Leftrightarrow \log(1{,}03^{n-1}) \geq \log(\frac{400}{299}) \\ &\Leftrightarrow (n-1)\log(1{,}03) \geq \log(\frac{400}{299}) \\ &\Leftrightarrow n-1 \geq \frac{\log(\frac{400}{299})}{\log(1{,}03)} \\ &\Leftrightarrow n \geq 1 + \frac{\log(\frac{400}{299})}{\log(1{,}03)} \end{aligned}$$
   Or : $1 + \frac{\log(\frac{400}{299})}{\log(1{,}03)} \approx 10{,}85$.
   Ainsi, $s_n \geq 800$ à partir de $n = 11$ (pour $n = 10$, 800 n'est pas encore atteint).
   Cela correspond donc à 2 ans et 3 trimestre écoulés.
   Selon ce modèle, il faudra donc faire ce recrutement au 3ème trimestre de 2021.

Exercice 14. ....

Une micro-entreprise de dépannage informatique a réalisé en 2019 un bénéfice de 22 000 €.
La direction de cette entreprise se fixe pour objectif une hausse annuelle de son bénéfice de 4,5%.
Pour tout entier naturel n, on note b_n le bénéfice prévu pour l'année $2019 + n$.
On a donc $b_0 = 22\,000$.

1. Calculer les bénéfices b_1 et b_2 espérés pour 2020 et 2021.
2. Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Exprimer b_n en fonction de n.
4. L'entreprise souhaite savoir en quelle année le bénéfice dépasserait 40 000 € avec une hausse annuelle de 4,5%.
   On considère l'algorithme Python suivant rédigé mais incomplet :

```
n=0
B=22000
while B...40000 :
  n=n+1
  B=...
A=n+2019
print(A)
```

   Compléter cet algorithme afin qu'il donne l'année où le bénéfice dépassera 40 000 €.
5. (a) Résoudre l'inéquation $1{,}045^n \geq 2$.

   (b) Au bout de combien d'années le bénéfice de l'entreprise aura-t-il doublé ?

Solution :

1. $b_1 = 22\,000 \times 1{,}045 = 22\,990$.
   $b_2 = 22\,990 \times 1{,}045 = 24\,024{,}55$.
2. On passe du terme au suivant en multipliant toujours par 1,045.
   (b_n) est ainsi une suite géométrique de raison $q = 1{,}045$ et de premier terme $b_0 = 22\,000$.
3.
$$\begin{aligned} b_n &= b_0 \times q^n \\ &= 22\,000 \times 1{,}045^n \end{aligned}$$
4.

```
n=0
B=22000
while B < 40000 :
  n=n+1
  B=B*1.045
A=n+2019
print(A)
```

Sans algorithme :

$$\begin{aligned} b_n \geq 40\ 000 &\Leftrightarrow 22\ 000 \times 1{,}045^n \geq 40\ 000 \\ &\Leftrightarrow 1{,}045^n \geq \frac{40\ 000}{22\ 000} \\ &\Leftrightarrow 1{,}045^n \geq \frac{20}{11} \\ &\Leftrightarrow \log(1{,}045^n) \geq \log\left(\frac{20}{11}\right) \\ &\Leftrightarrow n\log(1{,}045) \geq \log\left(\frac{20}{11}\right) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\log\left(\frac{20}{11}\right)}{\log(1{,}045)} \end{aligned}$$

Or : $\frac{\log\left(\frac{20}{11}\right)}{\log(1{,}045)} \approx 13{,}58$.
Donc le bénéfice dépassera 40 000 en $2019 + 14$, soit en 2033.

5. (a)

$$\begin{aligned} 1{,}045^n \geq 2 &\Leftrightarrow \log(1{,}045^n) \geq 2 \\ &\Leftrightarrow n\log(1{,}045) \geq \log(2) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\log(2)}{\log(1{,}045)} \end{aligned}$$

(b) $\frac{\log(2)}{\log(1{,}045)} \approx 15{,}75$.
Donc le bénéfice aura doublé en $2019 + 16$, soit en 2035.