Variables aléatoires - Partie 1

I Rappels : Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition 1
Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.
*Définir une **variable aléatoire** sur Ω, c'est associer à chaque issue de Ω un nombre réel*

Exemple 1
On lance un dé équilibré à 6 faces et on note le résultat obtenu.
Lorsque le dé indique 1, 2 ou 3, on gagne 4 euros
Lorsque le dé indique 4 ou 5 on gagne 1 euros
Lorsque le dé indique 6 on perd 5 euros
On définit ainsi une variable aléatoire X qui au numéro du dé, associe le gain, en euro, du joueur.
Cette variable prend les valeurs : ....
L'évènement $\{X = 1\}$ est réalisé par les issues ....
L'évènement $\{X < 2\}$ est réalisé par les issues ....

Notations
- On note généralement une variable aléatoire par une lettre majuscule : X, Y, Z etc.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. L'évènement : " X prend la valeur x est noté : $\{X = x\}$
- L'évènement : " X prend une valeur strictement inférieure à x est noté : $\{X < x\}$

Définition 2
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$.
*La **loi de probabilité** de X associe à toute valeur x_i la probabilité $P(X = x_i)$*

Remarque
- $P(X = x_i)$ peut se noter p_i
- $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

Exemple 2
Dans l'exemple précédent :
$P(X = -5) =$ ....
$P(X = 1) =$ ....
$P(X = 4) =$ On vérifie que la somme des probabilité vaut 1 : ....
et on peut résumer ces résultats dans un tableau :

x_i			
$P(X = x_i)$ ou p_i			

Exercice 1
On tire une carte aléatoirement dans un jeu de 52 cartes.
On considère le jeu suivant :
Si on tire une dame, on gagne 7 euros
Si on tire un trèfle on gagne 2 euros
Si on tire une autre carte, on perd 1 euros

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe le gain du joueur.
Déterminer la loi de probabilité de X

II Espérance d'une variable aléatoire

Définition 3
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.
*- **L'espérance** de la loi de probabilité de X est :*

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n}$$

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Exemple 3
Dans l'exercice précédent su jeu de cartes, calculer $E(X)$

Remarque
L'espérance est **la moyenne** que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois

III Schéma de Bernoulli, loi Binomiale

1) Schéma de Bernoulli

Définition 4
*Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues appelées "succès" et "echec"*

Exemple 4
On lance un dé équilibré à 6 faces, et on considère le succès : "obtenir la face 6" et comme échec : "ne pas obtenir la face 6". La probabilité du succès est $p =$ ....

Définition 5
*Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, pour lesquelles la probabilité du succès est p*

2) Loi Binomiale

Définition 6
On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
*Une **loi Binomiale** est une loi de probabilité qui donne le nombre de succès de l'experience*

Remarque
Si l'on répète n fois la même expérience, alors il est possible d'obtenir 0 succès, 1 succès, 2 succès ... ou n succès

Exemple 5
Une urne contient 4 boules indiscernables au toucher : 3 noires et une rouge.
On tire 3 fois de suite avec remise une boule dans l'urne
On considère comme succès l'évènement : "tirer la boule rouge"
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès
A l'aide d'un arbre de probabilité, calculer $P(X = 2)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice

Propriété 1
Espérance d'une loi Binomiale

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p, on a : $\boldsymbol{E(X) = n \times p}$

Exemple 6
On lance 10 fois un dé équilibré à 6 faces.
On considère comme succès le fait d'obtenir 1 ou 2.
On a donc $n =$ ....et $p =$ ....
Donc $E(x) =$ ....
On peut espérer obtenir environ ....un 1 ou un 2 en dix lancers

Exercice 2
Un QCM comporte 9 questions, à chaque question, 4 réponses sont proposées mais une seule est exacte.
Chaque bonne réponse rapporte 1 point.
Si l'on répond au hasard à chaque question, quelle note peut-on espérer obtenir?

IV Calculer des probabilité avec la loi Binomiale

1) Calcul de $P(X = k)$

<u>Avec la Texas Instruments (T.I) :</u>

Touches : $\mathbf{2^{nd}}$ et $\boldsymbol{VAR}$ puis choisir **binomFdP** et saisir les paramètres de l'énoncé : **binomFdP(n,p,k)**

<u>Avec le tableur :</u>

Saisir dans une cellule : **LOI.BINOMIALE(k;n;p;0)**

2) Calcul de $P(X \leq k)$

<u>Avec la Texas Instruments (T.I) :</u>

Touches : $\mathbf{2^{nd}}$ et $\boldsymbol{VAR}$ puis choisir **binomFRép** et saisir les paramètres de l'énoncé : **binomFRép(n,p,k)**

<u>Avec le tableur :</u>

Saisir dans une cellule : **LOI.BINOMIALE(k;n;p;1)**

Exercice 3
On lance 11 fois de suite un dé équilibré à 6 faces

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois que le dé affiche un nombre inférieur ou égal à 4.

1) Quelle est la loi suivie par X?

2) Calculer $P(X = 5)$

3) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 7 fois un nombre inférieur ou égal à 4 ?

4) Calculer $P(X \leq 5)$

5) Calculer $P(X \geq 3)$

6) En moyenne, combien de fois peut on espérer tomber sur un nombre inférieur ou égale à 4 ?

Schéma à connaitre par coeur :
Il s'agit de la répétition de $\boxed{n}$ expériences aléatoires et indépendantes de même probabilité de succès :
$\boxed{S = \text{".."}}$ $\boxed{(p = \text{.........}).}$
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès.
Donc X suit une loi Binomiale de paramètres $\boxed{n = \text{.........}}$ et $\boxed{p = \text{.........}}$