Suites géométriques

I Rappels et expression du terme général d'une suite géométrique

1) Rappels

Définition 1
*Une suite géométrique (u_n) est définie par son premier terme u_0 ou (u_1) et une **relation de récurrence** du type $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$*
*$\boldsymbol{q}$ est un nombre fixe appelé **la raison***

Exemple 1
1) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = 2u_n$
Cette suite est ....de raison ....
$u_1 =$
$u_2 =$
$u_3 =$
etc.

2) Soit (v_n) une suite géométrique de raison $1,4$ et de premier terme $v_1 = 2$
Sa formule de récurrence est donc : ....
$v_2 =$
$v_3 =$
$v_4 =$
etc.

3) On considère la liste suivante : 2 ; 3,5 ; 6,125
Dans cet ordre, ces nombres peuvent-ils être les termes consécutifs d'une suite géométrique?

Donc ....

2) Formule explicite

Propriété 1
Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors
$\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$ ou $\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$

Remarque
On peut ainsi calculer n'importe quel terme de (u_n) sans avoir besoin de calculer les précédents

Exercice 1
Léa souhaite acheter son prochain téléphone grâce à son argent de poche. Elle possède déjà 5 euros.
Chaque mois ses parents lui doublent son argent de poche.
Pour tout entier naturel, on note u_n la somme disponible dans sa tirelire après "n" mois. On a donc $u_0 = 5$

1) Déterminer u_1 et u_2

2) Expliquer pourquoi la suite (u_n) est une suite géométrique. Exprimer alors u_{n+1} en fonction de u_n

3) Exprimer u_n en fonction de n (cela signifie la même chose que : donner le terme général de la suite u_n

II Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 2
Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q :
$S = 1^{er} terme \times \dfrac{1 - q^{nombre-de-termes}}{1-q}$

Exemple 2
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 1,1$

1) Calculer $S_1 = u_0 + u_1 + ... + u_5$

2) Calculer $S_2 = u_9 + u_{10} + ... + u_{17}$

III Moyenne géométrique de 2 nombres

Définition 2
La moyenne arithmétique de 2 nombres a et b positifs est un nombre m tel que $\dfrac{a}{m} = \dfrac{m}{b}$

Propriété 3
1) Si une suite (u_n) est géométrique, alors la moyenne géométrique de u_{n-1} et u_{n+1} est égale à u_n pour tout entier naturel n non nul
2) La **moyenne géométrique** de deux nombres a et b positifs est $\boldsymbol{m = \sqrt{ab}}$

Exemple 3
La moyenne géométrique des nombres 3 et 12 est : ....
La moyenne géométrique des nombres 2 et 50 est : ....

Démonstration
2)

Exercice 2
Comparaison de suites
Amandine possède 200 euros qu'elle souhaite placer dans une banque. Son banquier lui propose deux options :

Option 1 : Elle dépose le capital de départ, et chaque année, la banque lui reverse 6% du capital de départ

Option 2 : Elle dépose le capital de départ, et chaque année, la banque lui reverse 4% du capital de l'année précédente.

L'objectif est de savoir à partir de combien d'année une option est plus intéressante que l'autre pour elle.

On note u_n la valeur du capital d'Amandine après n années si elle a choisi l'option 1, et v_n la valeur du capital d'Amandine après n années si elle a choisi l'option 2

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et v_1, v_2 , v_3

2) Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n)? Donner le premier terme et la raison

3) Exprimer u_n et v_n en fonction de n

4) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < v_n$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice

RÉSUMÉ	(u_n) une **suite géométrique** de **raison** q positive de premier terme u_0 positif.	**Exemple :** $q = 2$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$	$u_n = 4 \times 2^n$
Somme des termes consécutifs	$Somme = 1er\ terme \times \dfrac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison}$	$u_4 + \cdots u_{12} = u_4 \times \dfrac{1-2^9}{1-2}$
Variations	Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante.	$q = 2 > 1$ La suite (u_n) est croissante.
Représentation graphique	On parle de croissance exponentielle.