Probabilités conditionnelles et indépendance

I Probabilités conditionnelles

Définition 1
Soient A et B 2 évènements tels que $P(A) \neq 0$.

La probabilité B sachant A *est définie par* $\boldsymbol{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

C'est la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A s'est réalisé.

Exemple 1
Dans un jeu de 52 cartes, on tire une carte aléatoirement dans le paquet.
Soit A l'évènement "La carte un coeur"
Soit B l'évènement "La carte une dame"
Quelle est la probabilité que la carte soit une dame, sachant que c'est un coeur?

....
....
....
....

Exemple 2
Un service après vente a constaté que les retours d'un appareil sont dûs dans 40% des cas à une panne A, dans 30% des cas à une panne B, et dans 3% des cas à la simultanéité des 2 pannes.
Un appareil choisi au hasard présente la panne B, qu'elle est la probabilité qu'il présente la panne A?

....
....
....
....

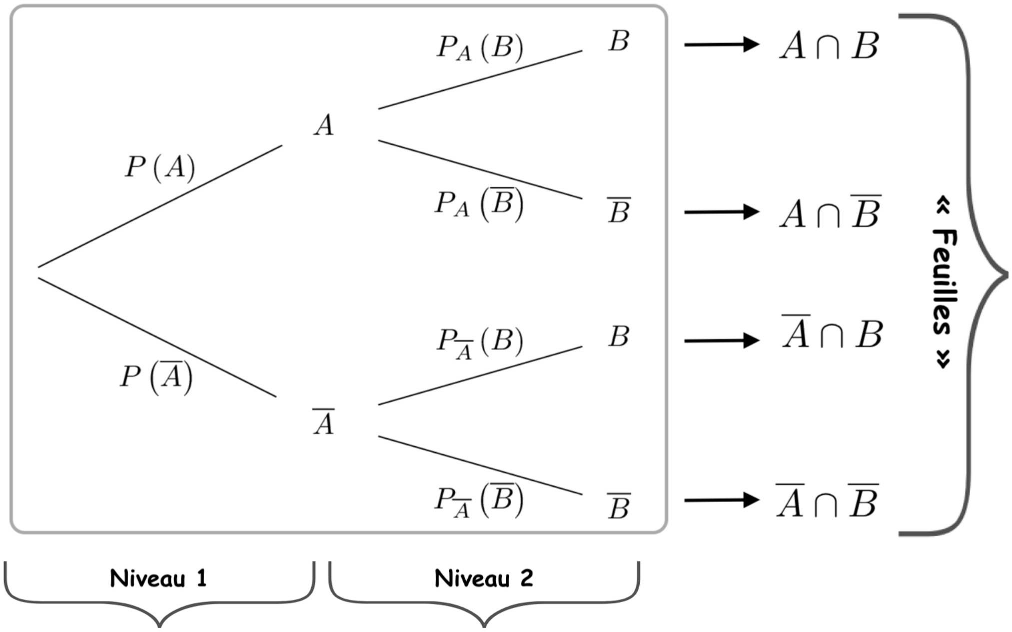
Remarque
Les probabilités conditionnelles sont des probabilités, donc elles ont les mêmes propriétés que les probabilités "simples"

Propriété 1
Soient A et B deux évènements avec $P(A) \neq 0$:
1) $0 \leq P_A(B) \leq 1$
2) $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
3) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

II Arbre pondéré

1) Construction

Un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) peut être représenté sous cette forme :



Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants.

Sur les branches du second niveau, on inscrit les probabilités conditionnelles des évènements correspondants.

2) Rêgles

Propriété 2
1) La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.
2) La probabilité d'une "feuille" (extrémité d'un chemin) est égale au produit des probabilités du chemin menant à cette feuille.

Exemple 3
Dans l'arbre construit précédemment, d'après la propriété, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$

Propriété 3
Formule des probabilités totales
La probabilité d'un évènement écrit à plusieurs extrémités du dernier niveau de l'arbre est la somme des probabilités des chemins qui conduisent à cet évènement.

Exemple 4
Dans l'arbre construit précédemment, les évènements B et $\overline{B}$ sont des évènements écrits à plusieurs extrémités du deuxième niveau de l'arbre. Pour calculer leur probabilité, on peut donc utiliser la formule des probabilités totales.

$P(B) =$ ....+............................ = ...+..

$P(\overline{B}) =$ ....+............................ = ...+..

III Indépendance

Propriété 4
Dire que deux évènements **A et B sont indépendants** signifie que $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

Remarque
On a donc aussi : A et B indépendants $\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$

Propriété 5
Si deux évènements A et B sont indépendants, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Exemple 5
Une urne contient 5 boules rouges numérotées : $2; 2; 3; 4$ et 6, et 5 boules bleues numérotés : $5; 6; 6; 8$ et 8.
On tire au hasard une boule dans l'urne et on considère les évènements :
A : " La boule tirée est rouge"
B : " La boule tirée porte un numéro impair"
Justifier que les évènements A et B sont indépendants.

....
....
....