

Suites arithmétiques

I Rappels et expression du terme général d'une suite arithmétique

1) Rappels

Définition 1

Une suite arithmétique (u_n) est définie par son premier terme u_0 ou (u_1) et une **relation de récurrence** du type $u_{n+1} = u_n + r$
 r est un nombre fixe appelé **la raison**, et représente **l'écart entre deux termes consécutifs** de la suite

Exemple 1

1) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = u_n + 4$

Cette suite estde raison

$u_1 =$
 $u_2 =$
 $u_3 =$
 etc.

2) Soit (v_n) une suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $v_1 = 107$

Sa formule de récurrence est donc :

$v_2 =$
 $v_3 =$
 $v_4 =$
 etc.

3) On considère la liste suivante : $-4 ; 5 ; 14 ; 23 ; 30$

Dans cet ordre, ces nombres peuvent-ils être les termes consécutifs d'une suite arithmétique?

Donc

2) Formule explicite

Propriété 1

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors

$$u_n = u_0 + nr \text{ ou } u_n = u_1 + (n - 1)r$$

Remarque

On peut ainsi calculer n'importe quel terme de (u_n) sans avoir besoin de calculer les précédents

Exercice 1

Jade souhaite acheter son prochain téléphone grâce à son argent de poche. Elle possède déjà 75 euros.

Chaque mois ses parents lui donnent 25 euros d'argent de poche.

Pour tout entier naturel, on note u_n la somme disponible dans sa tirelire après "n" mois. On a donc $u_0 = 75$

1) Déterminer u_1 et u_2

- 2) Expliquer pourquoi la suite (u_n) est une suite arithmétique. Exprimer alors u_{n+1} en fonction de u_n
- 3) Exprimer u_n en fonction de n (cela signifie la même chose que : donner le terme général de la suite u_n)

II Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété 2

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $r = 4$

- 1) Calculer $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_5$
- 2) Calculer $S_2 = u_9 + u_{10} + \dots + u_{17}$

Exercice 2

Pour se préparer pour les J-O, Marc, un coureur, décide de s'entraîner progressivement. Il commence son entraînement au "jour 0" par un footing de 3000m. Le lendemain il court 3150m. Le jour suivant 3300m et ainsi de suite.

On note u_n la distance parcourue au "jour n " d'entraînement.

- 1) Calculer u_3 et u_4
- 2) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? donner son premier terme et sa raison
- 3) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
- 4) Exprimer u_n en fonction de n
- 5) Quelle distance aura parcouru au total Marc lorsqu'il sera au "jour 15" de son entraînement?
- 6) Quelle distance aura-t-il parcourue au total entre le "jour 8" et le "jour 12"

III Moyenne arithmétique de 2 nombres

Définition 2

La moyenne arithmétique de 2 nombres a et b est égale à $m = \frac{a + b}{2}$

Exemple 3

La moyenne arithmétique des nombres 6 et 12 est :

La moyenne arithmétique des nombres -4 et 7 est :

Propriété 3

Si une suite (u_n) est arithmétique, alors la moyenne arithmétique de u_{n-1} et u_{n+1} est égale à u_n pour tout entier naturel n non nul

Démonstration

RÉSUMÉ

	(u_n) une suite arithmétique - de raison r - de premier terme u_0 .	Exemple : $r = -0,5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à $-0,5$.
Propriété	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_1 + (n - 1)r$	$u_n = 4 - 0,5n$
Variations	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0,5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Somme des termes consécutifs	<i>Somme = nombre de termes</i> $\times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$	$u_3 + \dots + u_{10} = 8 \times \frac{u_3 + u_{10}}{2}$
Représentation graphique	Remarques : Les points de la représentation graphique sont alignés. On parle de croissance linéaire.	