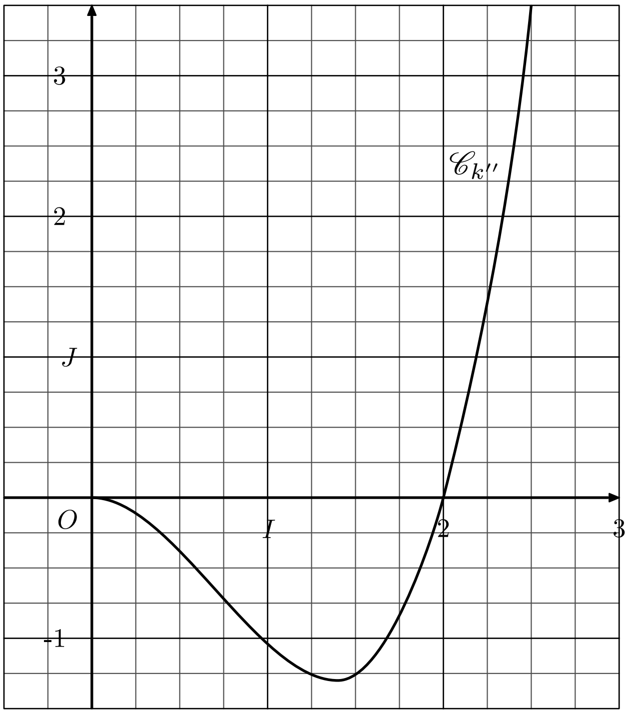
Exercices : Convexité

Exercice 1

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0\,;+\infty[$.



Parmi les réponses proposées, laquelle est correcte?

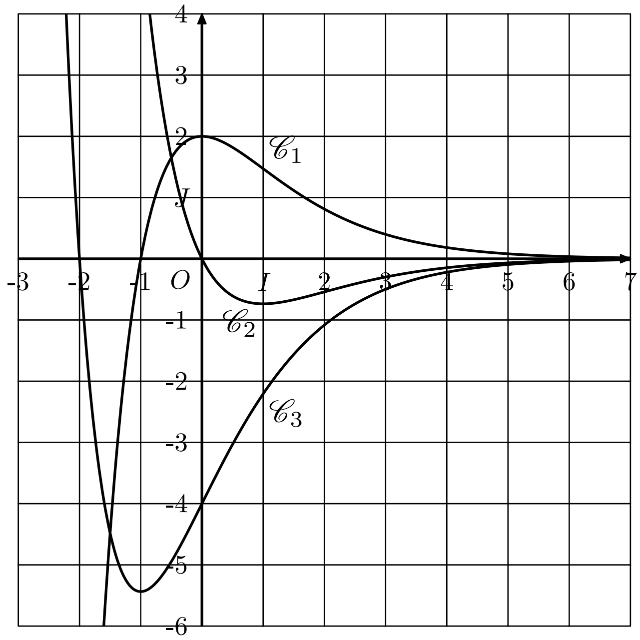
1. k est concave sur l'intervalle $[1\,;2]$.
2. k est convexe sur l'intervalle $[0\,,2]$.
3. k est convexe sur $[0\,;+\infty[$.
4. k est concave sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 2

Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ définies sur $[-3\,;7]$ ont été représentées.
L'une de ces fonctions représente une fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.

Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



Exercice 3

Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-9\cdot x$ est convexe sur l'intervalle :

a. $]-\infty\,;+\infty[$ b. $[0\,;+\infty[$

c. $]-\infty\,;0]$ d. $[-3\,;3]$

Exercice 4

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;4]$ par : $f(x)=(x+2)\cdot \mathrm{e}^{-x+1}$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[-2\,;4]$, on a : $f'(x)=-(x+1)\cdot \mathrm{e}^{-x+1}$
2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser(dériver[$-(x+1)*\exp(-x+1)$]) $x*\exp\left(-x+1\right)$
2	intégrer[$(x+2)*\exp(-x+1)$] $-(x+3)*\exp\left(-x+1\right)$

En utilisant ces résultats, répondre à la question suivante :

Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. Justifier.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,8]$ par :
$$f(x)=\frac{0{,}4}{20\cdot \mathrm{e}^{-x}+1}+0{,}4$$

1. Montrer que $f'(x)=\dfrac{8\cdot \mathrm{e}^{-x}}{\left(20\cdot \mathrm{e}^{-x}+1\right)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

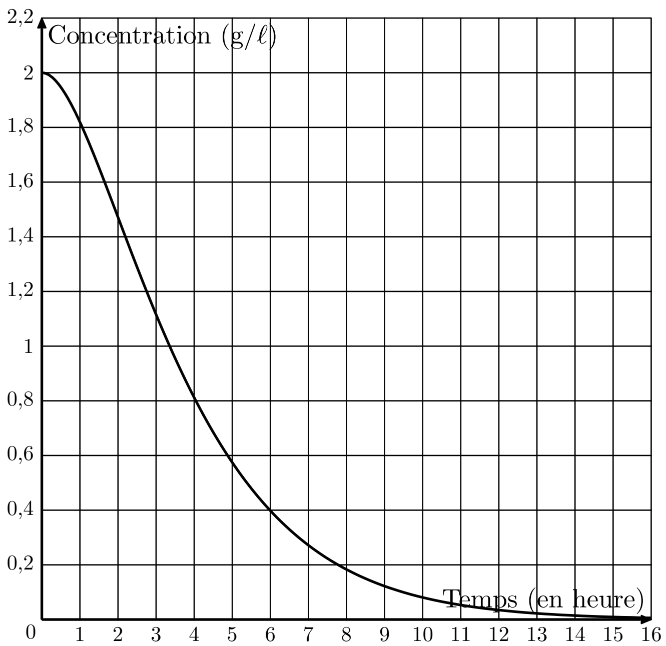
1	`f'(x):=8*e^(-x)/(20*e^(-x)+1)^2` $f'(x) := \dfrac{8\cdot e^{-x}}{400\left(e^{-x}\right)^2+40\cdot e^{-x}+1}$
2	`g(x):=Dérivée[f'(x)]` $g(x) := \dfrac{160\cdot\left(e^{-x}\right)^2-8\cdot e^{-x}}{8000\cdot\left(e^{-x}\right)^3+1200\cdot\left(e^{-x}\right)^2+60\cdot e^{-x}+1}$
3	`Factoriser[g(x)]` $8\cdot e^{-x}\cdot\dfrac{20\cdot e^{-x}-1}{\left(20\cdot e^{-x}+1\right)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Exercice 6

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes en litres, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie ci-dessous :



En vous aidant d'une lecture graphique et sans justifier, au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle?

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par :

$$f(x) = (-2\cdot x+30)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$$

1. a. Montrer que $f'(x)=(-0{,}4\cdot x+4)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20\,;20]$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-20\,;20]$.
On précisera la valeur exacte du maximum de f.

2. a. Montrer que, sur l'intervalle $[-20\,;20]$, l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α.

b. Donner une encadrement de α d'amplitude 0,2.

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10\cdot x+200)\cdot e^{0{,}2\cdot x+3}$ $(-2\cdot x+30)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$
2	Dériver $(2\cdot x+30)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$ $(-0{,}4\cdot x+4)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$
3	Dériver $(-0{,}4\cdot x+4)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$ $(-0{,}08\cdot x+0{,}4)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$

Répondre à la question suivante en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :

$$f(x) = -x\cdot\ln(x)+2\cdot x+1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.