Convexité

I Dérivée seconde

Définition 1
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I
*On appelle **fonction dérivée seconde** de f sur I la dérivée de f' et on note $f''(x) = (f'(x))'$*

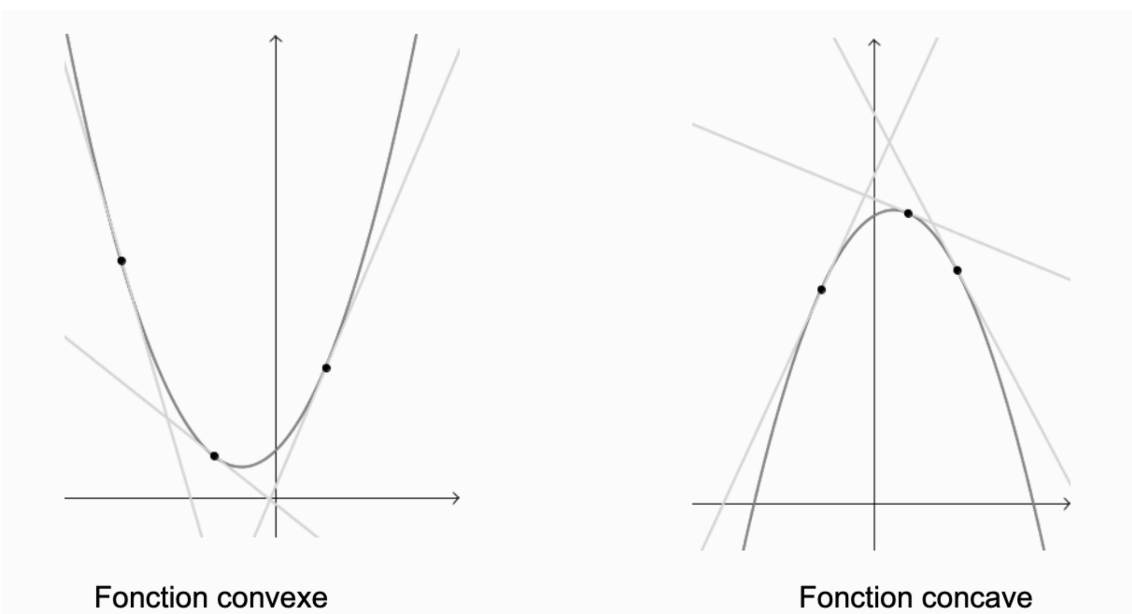
Exemple 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x^3 - 4x^2 + 2x - 4$
Déterminer la dérivée seconde de f

II Fonction convexe, fonction concave

1) Définitions

Définition 2
Soir une fonction f dérivable sur un intervalle I

1. *La fonction f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située **au-dessus** de chacune de ses tangentes.*
2. *La fonction f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située **en dessous** de chacune de ses tangentes.*



2) Propriétés

Propriété 1

1. La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$
2. La fonction cube est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$
3. La fonction inverse est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$
4. La fonction racine carrée est concave sur $[0;+\infty[$

Propriété 2
Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

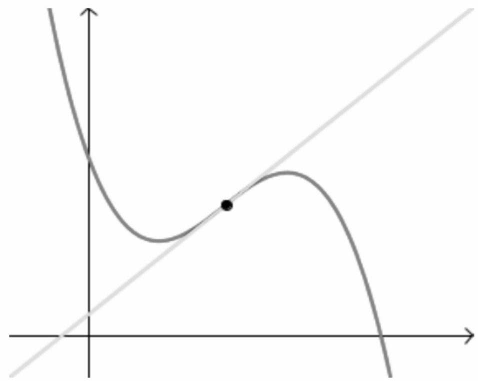
1. On dit que **f est convexe sur I** si sa dérivée **f' est croissante sur I** et donc que $\boldsymbol{f''(x) \geq 0}$ pour tout x de I
2. On dit que **f est concave sur I** si sa dérivée **f' est décroissante sur I** et donc que $\boldsymbol{f''(x) \leq 0}$ pour tout x de I

Démonstration
EXIGIBLE

Exercice 1
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 4$.
Etudier la convexité de la fonction f

III Point d'inflexion

Définition 3
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Un point d'inflexion *est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point*



Remarque
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité
(elle passe de concave à convexe, ou de convexe à concave)

Exemple 2
On considère la fonction cube

Exercice 2
Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10000 clés par mois.
Le cout de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés est donné par : $C(x) = 0,05x^3 - 10,5x^2 + 8x + 4$

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction C
2. Démontrer ces résultats
3. Interpréter les résultats obtenus dans le contexte de l'exercice

Exercice 3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$

1. Etudier la convexité de la fonction f
2. Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f en -1
3. En déduire que pour tout réel $x < 0$ on a $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$