Les suites - Partie 2

I Limites et comparaison

Théorème 1 (Théorème de comparaison)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites. **Si** pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 on a :

1. $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$;
2. $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 2 (Théorème d'encadrement dit «des gendarmes»)
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.
Si, pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l, alors la suite (u_n) converge vers l.

Exemple 1
Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_n = n^2 + (-1)^n$
$v_n = 1 + \dfrac{\sin n}{n}$

II Suites majorées, minorées, bornées

1) Définitions

Définition 1

1. *La suite (U_n) est **majorée** si il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,* $\boldsymbol{U_n \leq M}$
2. *La suite (U_n) est **minorée** si il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,* $\boldsymbol{U_n \geq m}$
3. *La suite (U_n) est **bornée** si elle est **à la fois majorée et minorée***

Exercice 1
Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 2$.
Démontrer par récurrence que (U_n) est majorée par 4

2) Convergence des suites monotones

Propriété 1
Soit (U_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.
Si $\lim_{n \to +\infty} U_n = l$ alors la suite (U_n) est majorée par l

Théorème 3 (Théorème de la convergence monotone)
- Si une suite est **croissante et majorée**, alors **elle converge**
- Si une suite est **décroissante et minorée**, alors **elle converge**

Remarque
Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite

Exercice 2
Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n=1} = \frac{1}{3}U_n + 2$

1. Monter que (U_n) est croissante
2. Montrer que (U_n) est majorée par 4 *(question faite dans l'exercice précédent)*
3. En déduire la convergence de la suite (U_n)
4. Déterminer sa limite

Remarque
- Si une suite est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$
- Si une suite est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$

III Comportement à l'infini d'une suite géométrique

1) Rappel

Définition 2
Une suite (U_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier n, on a : $U_{n+1} = U_n \times q$

Exemple 2
Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = -5U_n$.
Cette suite est

Propriété 2
Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q .
Pour tout entier naturel n on a : $U_n = U_0 \times q^n$

Exemple 3
Dans l'exemple précédent :

2) Limites

Propriété 3

1. Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite
2. Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
3. Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
4. Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

3) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 4
Soit n un entier naturel non nul et q un réel $\neq 1$, alors on a :
$1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$

Exercice 3
Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-3)^n}{4}$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n - 4^n$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{2} + (\dfrac{1}{2})^2 + ... + (\dfrac{1}{2})^n$