REVISIONS

Ex 1

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & v_0 = 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + v_n \end{array}\right.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. **a.** Calculez u_1 et v_1.

b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n+1$.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

b. En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

c. Déterminer la limite de la suite $\left(r_n^2\right)$ et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

d. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et 10** (-4) représente 10^{-4}).
La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
À quoi correspond-elle ?

REVISIONS

Ex 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.

b. La suite (w_n) converge vers 1.

c. La suite (u_n) est minorée par 1.

d. La suite (w_n) est croissante.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$

b. $f'(x) = (1+2x)e^{x^2}$

c. $f'(x) = \left(1+2x^2\right)e^{x^2}$

d. $f'(x) = \left(2+x^2\right)e^{x^2}$.

3. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $+\infty$.

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.

b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.

c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0; 1]$ tel que $h(a) = 1$.

d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1 ; 1]$.

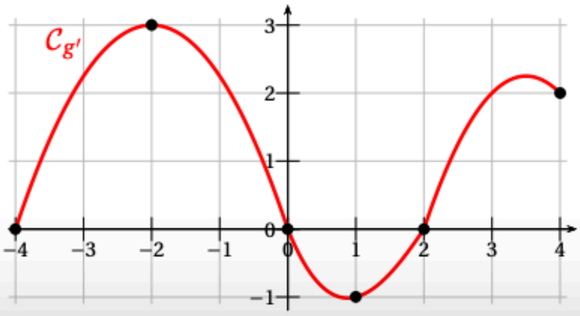
5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

b. g est croissante sur l'intervalle $[1; 2]$.

c. g est convexe sur l'intervalle $[1; 2]$.

d. g admet un minimum en 0.



Ex 3

Principaux domaines abordés : Suites numériques; raisonnement par récurrence; suites géométriques.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2. **a.** Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

c. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.