CORRIGE des exercices type bas sur les suites Feuille 1

Exercice 1

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives.**

1. **a.** $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2 \times u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$.

   b. Pour tout n, $v_{n+1} = 2u_n + v_n$ donc $v_{n+1} - v_n = 2u_n$.
   On a admis que la suite (u_n) était strictement positive donc, pour tout n, $u_n > 0$; on en déduit que, pour tout n, $v_{n+1} - v_n > 0$ donc que la suite (v_n) est strictement croissante.
   La suite (v_n) est strictement croissante donc, pour tout n, $v_n \geqslant v_0$ donc $v_n \geqslant 1$.

   c. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant n + 1$.
   On démontre cette propriété par récurrence.
   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1$ et $n + 1 = 1$ donc $u_n \geqslant n + 1$; $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   - **Hérédité**
     On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie (hypothèse de récurrence) et on va démontrer que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
     $\mathscr{P}_n$ vraie équivaut à $u_n \geqslant n + 1$.
     $u_{n+1} = u_n + v_n$; or $u_n \geqslant n + 1$ et, d'après la question 1.b, $v_n \geqslant 1$. On en déduit que $u_{n+1} \geqslant n + 2$ et donc que la propriété est vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion**
     La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n + 1$.

   d. Pour tout n, $u_n \geqslant n + 1$; or $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. On pose, pour tout entier naturel n : $r_n = \dfrac{v_n}{u_n}$. On admet que : $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

   a. $(-1)^{n+1}$ vaut soit -1, soit 1 selon la parité de n ; donc $-1 \leqslant (-1)^{n+1} \leqslant 1$.
   On sait que $u_n > 0$ donc $u_n^2 > 0$.
   On divise par u_n^2 et on obtient : $-\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.

   b. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^2 = +\infty$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n^2} = 0$.
   On sait de plus que, pour tout n : $-\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.
   Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$.

   c. $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n^2 = 2$.
   On peut en déduire que la suite (r_n) converge vers $\sqrt{2}$

   d. Pour tout entier naturel n,
   $$r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n\left(2 + \dfrac{v_n}{u_n}\right)}{u_n\left(1 + \dfrac{v_n}{u_n}\right)} = \frac{2 + \dfrac{v_n}{u_n}}{1 + \dfrac{v_n}{u_n}} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

   e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

   La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
   Elle correspond à la plus petite valeur de n pour laquelle la distance entre r_n et $\sqrt{2}$ est inférieure ou égale à 10^{-4}.

Exercice 2 (QCM corrigé en classe)

Exercice 3

Principaux domaines abordés : Suites numériques; raisonnement par récurrence; suites géométriques.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$.

Pour $n = 1$, $u_1 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. a. La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :
= 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1.

b. La suite (u_n) semble croissante.

3. a. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité**
  On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ (hypothèse de récurrence).

$$n \leqslant u_n \leqslant n+1 \iff \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)$$
$$\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n$$
$$\iff n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant n + \frac{3}{4}$$
$$\iff n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1 \iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4}$$

  donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.
  On a démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. D'après la question précédente :

- Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ donc $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ d'où on tire $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, $n \leqslant u_n$; or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c. Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n+1}{n}$ c'est-à-dire :
$1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$
Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Pour tout n, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.
$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}(v_n + n) - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n$
$v_0 = u_0 - 0 = 1$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

b. On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.