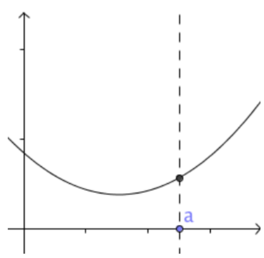
Continuité de fonctions

I Notion de continuité

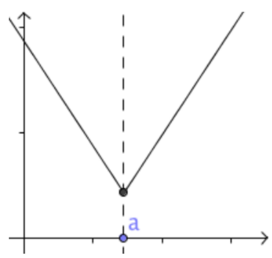
La courbe représentative d'une fonction continue se trace "sans lever le crayon"

Définition 1
Soit une fonction f définie que un intervalle I. Soit $a \in I$.

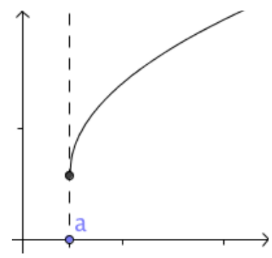
1. *f est continue en a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$*
2. *f est continue sur I si f est continue en tout point de I*



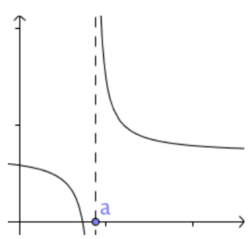
f est continue en a



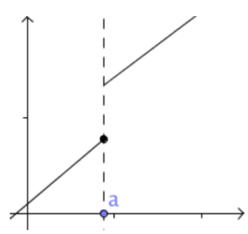
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

Exemple 1

1. Les fonctions polynômes sont
2. la fonction $f(x) = \mid x \mid$ est
3. la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est
4. la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est
5. les fonctions $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$ sont

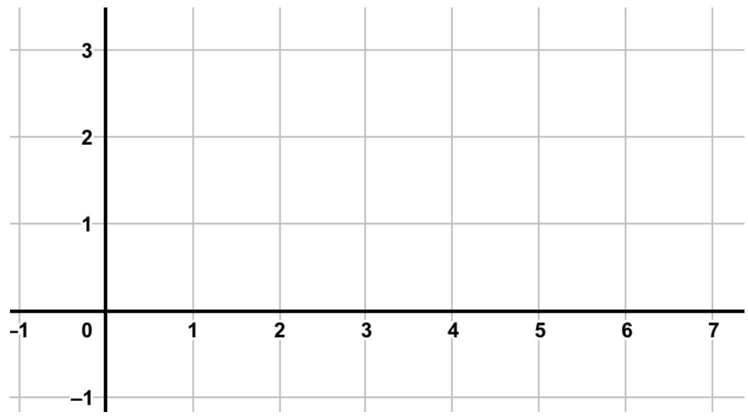
Remarque
Dans un tableau de variation, les flèches traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle concerné.

Théorème 1
Une fonction dérivable sur I est continue sur I

Exercice 1
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

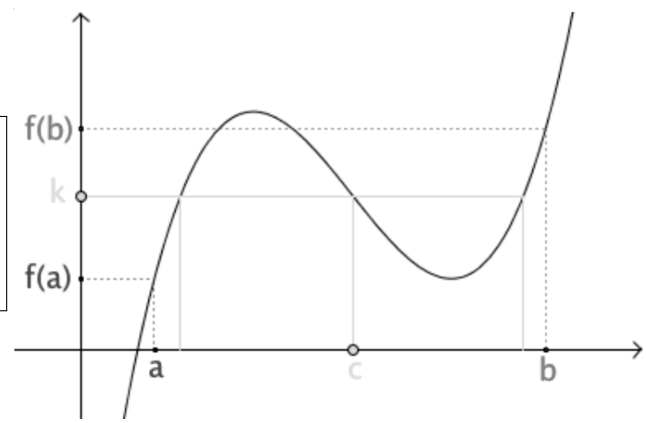
$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 3 \\ x-4 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ -2x+13 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

La fonction f est elle continue sur $\mathbb{R}$?



II Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2 (Théorème des valeurs intermédiaires T.V.I)
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a;b]$
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$



Conséquences :
* Si f est strictement monotone sur $[a;b]$, alors c est unique
* Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(x) = 0$

1
En pratique, pour montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution, sur $[a;b]$, on démontre que :

1. f est continue sur $[a;b]$
2. f est strictement monotone sur $[a;b]$
3. k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

La première et dernière condition nous assurent de l'existence de la solution, et la deuxième condition nous apporte son unicité

Exercice 2
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2,5; 5]$
2. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α à 10^{-2}

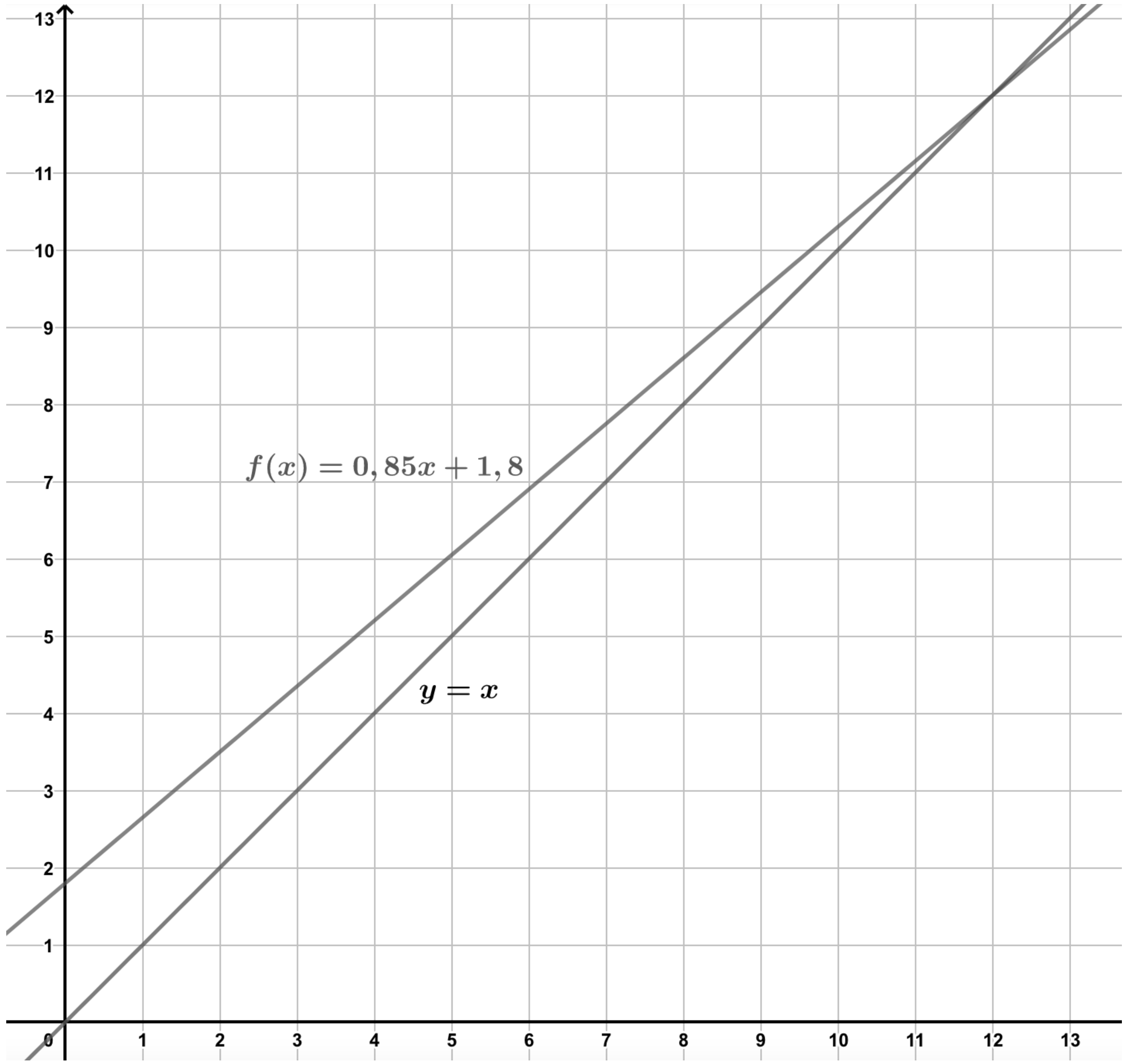
III Application à l'étude d'une suite

1) Image d'une suite convergente par une fonction continue

Théorème 3
Soit f une fonction définie et continue sur I et soit (U_n) une suite telle que pour tout n on a : $U_n \in I$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
Si (U_n) converge vers une limite l de I alors $f(l) = l$

Exercice 3
Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 8$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = 0,85U_n + 1,8$

1. Dans le repère orthonormé suivant, placer sur les abscisses U_0, U_1, U_2 et U_3 en laissant les traits de construction
2. A l'aide du graphique, conjecturer la limite de (U_n)
3. En supposant que la suite est convergente, démontrer la conjecture précédente



2) Variation d'une suite à l'aide d'une fonction associée

Propriété 1
Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et (U_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = f(n)$
- Si f est croissante sur $[0;+\infty[$ alors (U_n) est croissante
- Si f est décroissante sur $[0;+\infty[$ alors (U_n) est décroissante

Exercice 4
Soit (U_n) une suite définie par $U_n = \dfrac{1}{n+1}$.
Déterminer le sens de variation de la suite (U_n)