Vecteurs, droites et plans de l'espace

I Vecteurs de l'espace

1) Notion de vecteur dans l'espace

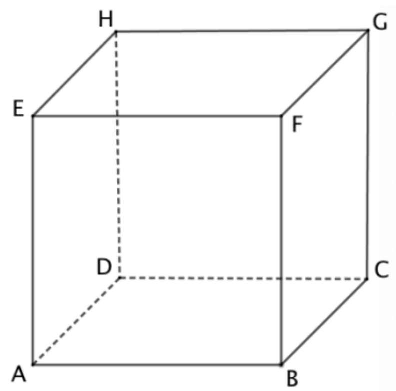
Définition 1
*Un **vecteur de l'espace** est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur)*

Remarque
Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane.

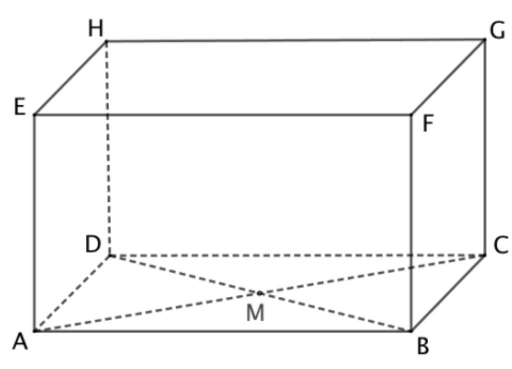
2) Combinaisons linéaires de vecteurs dans l'espace

Définition 2
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
*On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ tout vecteur $\overrightarrow{z}$ de la forme* $\boldsymbol{\overrightarrow{z} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}}$

Exemple 1
A l'aide du cube suivant, représenter les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vérifiants :
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{CG}$
$\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$



Exemple 2
Dans le parallélépipède rectangle suivant, M est le centre du rectangle $ABCD$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ à l'aide de combinaisons linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.



II Droites de l'espace

1) Vecteurs colinéaires

Définition 3
Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ ***et*** $\overrightarrow{v}$ ***colinéaires*** *signifient qu'ils ont la même direction. C'est à dire qu'il existe un nombre réel* k *tel que* $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$

2) Vecteur directeur d'une droite

Définition 4
On appelle ***vecteur directeur*** *d'une droite* (d) *tout vecteur non nul de même direction que* (d)

Propriété 1
Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires

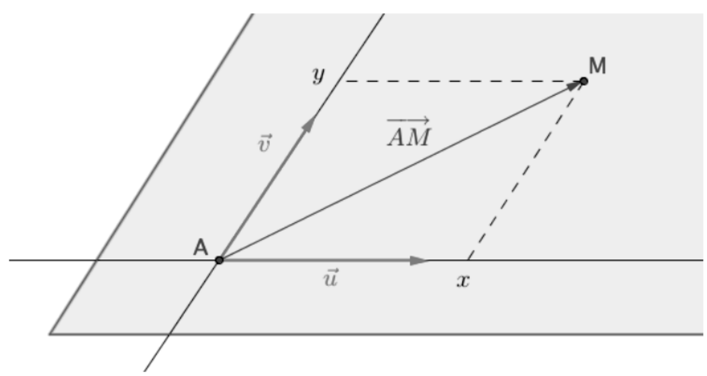
III Plans dans l'espace

1) Direction d'un plan dans l'espace

Propriété 2
Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan dans l'espace

2) Caractérisation d'un plan dans l'espace

Propriété 3
Soit A un point et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$



Remarque
Dans ces conditions, le triplet $(A; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ est un repère du plan
Un plan est déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires

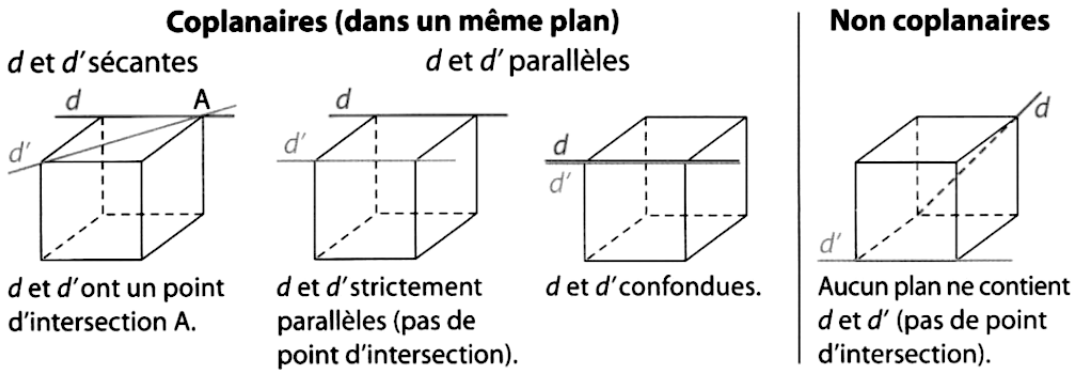
Propriété 4
Deux plan déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles

Conséquence
Pour prouver que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plan sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre

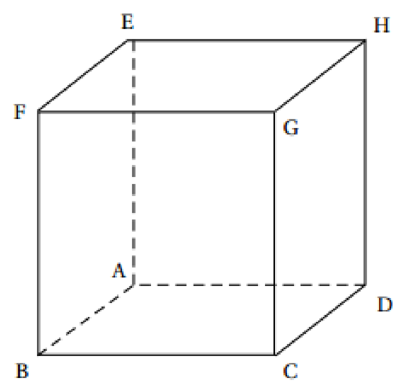
IV Positions relatives de droites et plans de l'espace

1) Positions relatives de deux droites

Propriété 5
Deux droites de l'espaces sont soit **coplanaires** (dans un même plan) soit non coplanaires



Exemple 3
Soit $ABCDEFGH$ un cube.
Les droites (AB) et (HG) sont

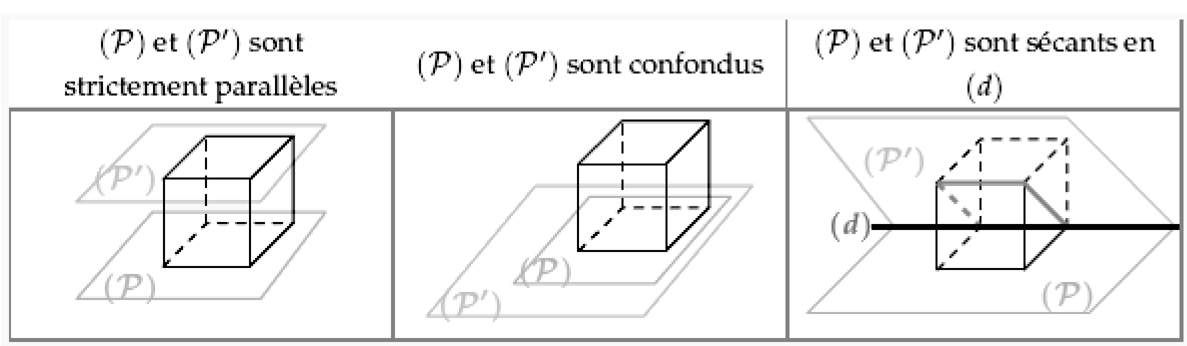


Les droites (EF) et (GF) sont

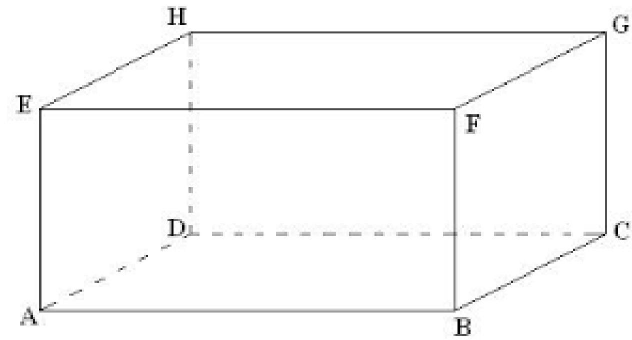
Les droites (EH) et (CG) sont

2) Positions relatives de deux plans

Propriété 6
Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles

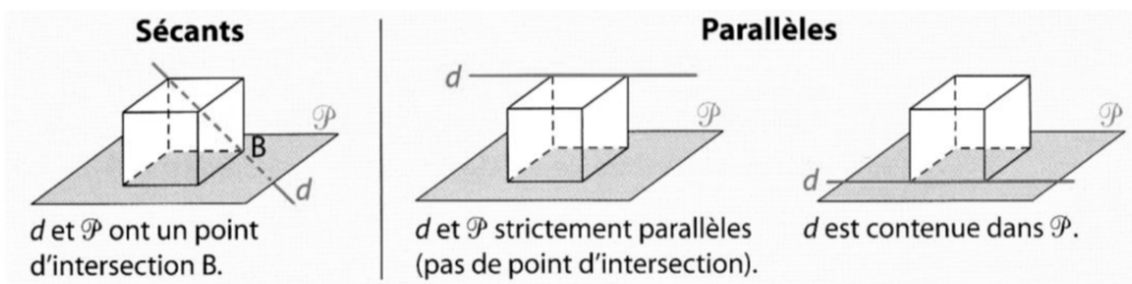


Exemple 4
Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit.
Les plans (AEH) et (DGF) sont
.
.
Les plans (ABC) et (EFG) sont



3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

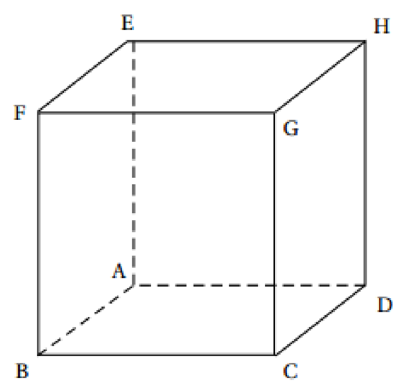
Propriété 7
Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles



Exemple 5
Soit $ABCDEFGH$ un cube. Avec I le milieu du carré $ABCD$
La droite (HI) et le plan (ABC) sont

La droite (FH) et le plan (EFG) sont

La droite (EG) et le plan (ABC) sont



V Bases et repères de l'espace

1) Vecteurs coplanaires et bases de l'espace

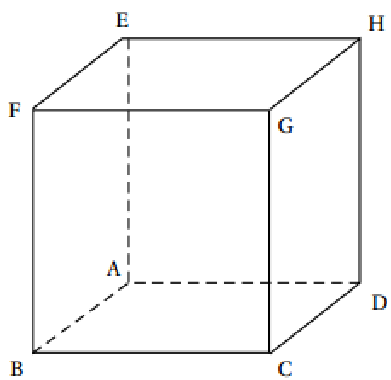
Définition 5
Trois vecteurs sont ***coplanaires*** *s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan*

Propriété 8
Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ **et** $\overrightarrow{w}$ de l'espace sont **coplanaires** si il existe un couple de réel $(x;y)$ tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{w}}$

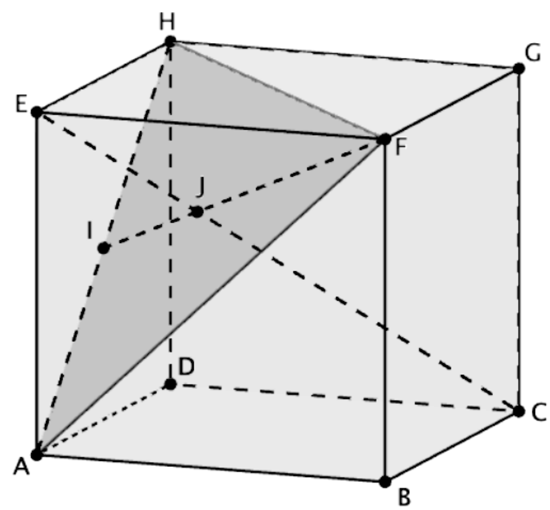
Propriété 9
Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$

Définition 6
Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
*On appelle **base de l'espace**, le triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*

Exemple 6
Soit $ABCDEFGH$ un cube.
1) Reconnaître une base de l'espace
.
.
2) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans cette base
.
.



Exercice 1
Soit $ABCDEFGH$ un cube.
Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point de $[FI]$ tel que $\overrightarrow{FJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FI}$
1) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$
.
.
.
.
.
.
.
.
.
2) En déduire que les points E, J et C sont alignés



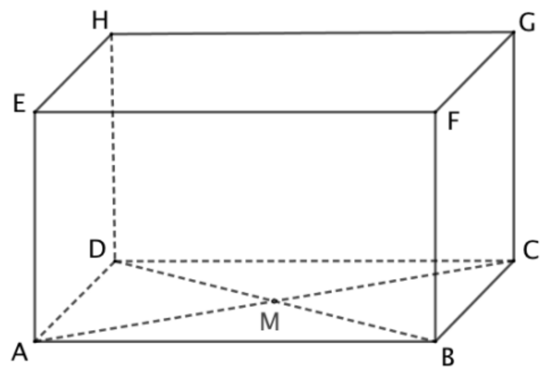
2) Repère de l'espace

Définition 7
Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires et O un point de l'espace.
On appelle ***repère de l'espace*** *le quadruplet $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$*

Remarque
O est appelé origine du repère

La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ donne les coordonnées du point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Exercice 2
Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit.
I est le milieu de $[CG]$
N et P sont définis par $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}$
1) Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de tous les points de la figure



2) Placer le point $K(1; 3; -1)$