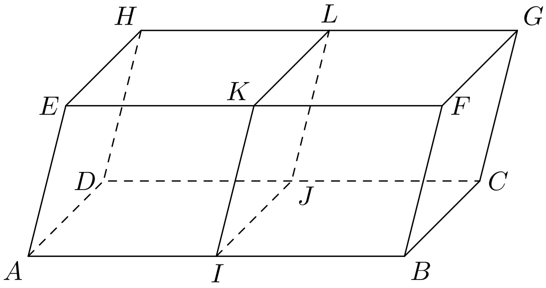
Terminale spécialité - Ch6: Vecteurs droites et plans de l'espace

Exercice 1

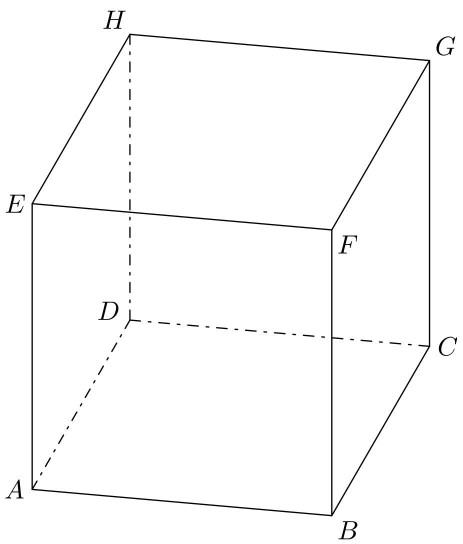
Dans l'espace, on considère le parallélépippède $ABCDEFGH$. On note I, J, K, L les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$, $[GH]$.



1. a. Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AJ}$.
   b. Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{ED}$.
   c. Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{DK}$.
2. Donner un représentant de chaque somme suivante :
   a. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{\ldots}$
   b. $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{HI} = 2 \cdot \overrightarrow{\ldots}$
   c. $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{\ldots B}$

Exercice 2

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :

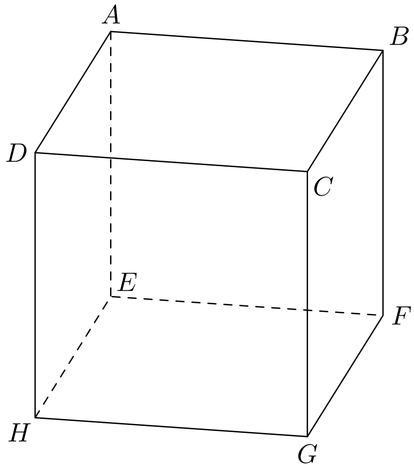


1. Donner la position relative des couples de droites suivants :
   a. (EH) et (BC)
   b. (EB) et (FA)
   c. (BA) et (EG)
   d. (EC) et (AG)
2. Donner la position relative des couples de droite et plan suivants :
   a. (EH) et (AFG)
   b. (HD) et (FAG)
   c. (FA) et (DHG)
   d. (BC) et (HFA)
3. Donner la position relative des plans suivants :
   a. (HED) et (BCF)
   b. (HGA) et (DCB)

Exercice 3

Définition :

Deux droites sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan.



Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre :

1. Parmi les couples de droites ci-dessous, lesquelles sont coplanaires entre elles :
   a. (EA) et (FB)
   b. (HE) et (CB)
   c. (HC) et (AD)
   d. (GA) et (CA)
   e. (HB) et (DA)

Dans la question suivante, nous allons utiliser les trois définitions suivantes :

Définition :

Deux droites sont parallèles dans l'espace si elles sont **coplanaires** *et si elles sont parallèles dans ce plan.*

Définition :

Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point en commun ou alors lorsqu'ils sont confondus.

Définition :

Une droite et un plan sont parallèles lorsque :

- *ou bien $\mathcal{P}$ et Δ n'ont aucun point en commun.*
- *ou alors la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$*

2. Parmi les couples ci-dessous, lesquels définissent un couple d'objets parallèles :
   a. (GD) et (AB)
   b. (EB) et (HGC)
   c. (EF) et (DC)
   d. (BAH) et (GFH)

Vocabulaire :

On parle de droites perpendiculaires uniquement dans le cas de droites coplanaires

Définition :

- *Deux droites sont orthogonales si elles sont respectivement parallèles à deux droites perpendiculaires d'un même plan*
- *Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes droites de ce plan.*

3. Donner les couples ci-dessous qui sont orthogonaux :

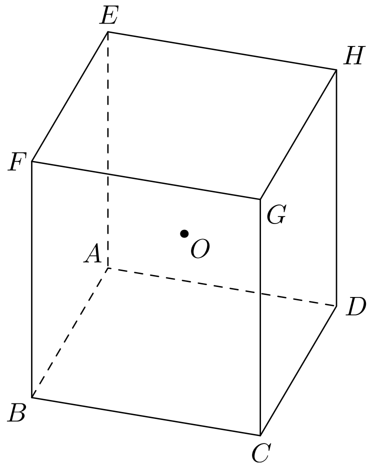
a. (EF) et (HE) b. (DB) et (AB)

c. (HD) et (ABC) d. (HB) et (BFG)

e. (AC) et (HDF) f. (HF) et (GCF)

Exercice 4

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous de centre O.



Déterminer les coordonnées des points de chacun des sommets du cube ainsi que du point O dans chacun des repères suivants :

a. $\left(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BF}\right)$ b. $\left(A\,;\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$

c. $\left(O\,;\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OG}\,;\overrightarrow{OE}\right)$

Exercice 5

1. Montrer que les couples suivants de vecteurs sont coliéaires :

   a. $\vec{u}\,(6\,;21\,;9)$; $\vec{v}\,(4\,;14\,;6)$

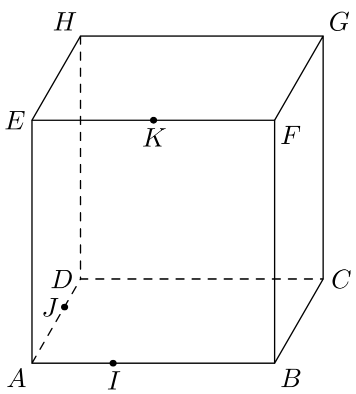
   b. $\vec{u}\left(3\,;5\,;\dfrac{4}{3}\right)$; $\vec{v}\left(\dfrac{6}{5}\,;2\,;\dfrac{8}{15}\right)$

2. Justifier que les deux vecteurs suivants ne sont pas colinéaires : $\vec{u}\,(5\,;8\,;3)$; $\vec{v}\left(3\,;\dfrac{24}{5}\,;\dfrac{8}{5}\right)$

Exercice 6

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre et les trois points définis par :

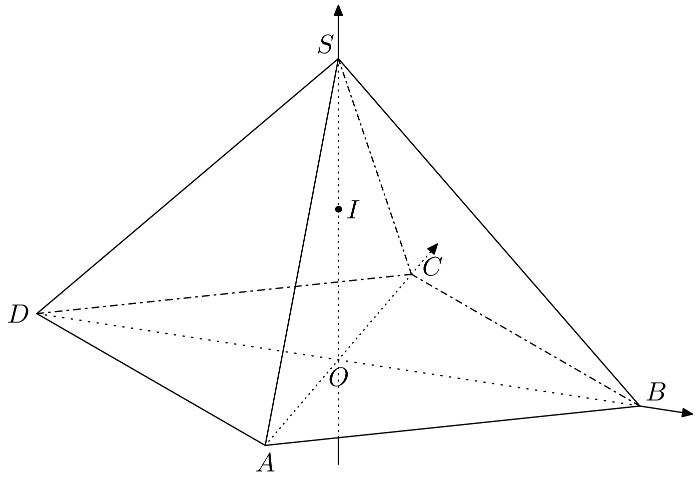
- Le point K est le milieu de $[EF]$;
- le point I vérifie la relation $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$;
- le point J vérifie la relation $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AD}$.



En utilisant le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$, montrer que les droites (IJ) et (KH) sont parallèles.

Exercice 7

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constitué de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB=1$.
On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OS}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK}=\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

   a. Déterminer les coordonnées du point K.

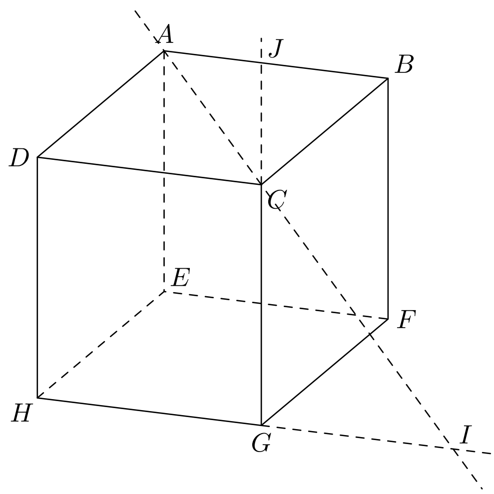
   b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.

   c. On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
   Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

   d. Déterminer les coordonnées du point L.

Exercice 8

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ dont la représentation est donnée ci-dessous :



Dans la représentation suivante, I est un point appartenant à la droite (GH) et J appartient à la droite (AB).

Quatre affirmations sont proposées ci-dessous. Dire si chacune de ces propositions est vrai ou fause en justifiant votre réponse.

1. Le triangle EHD rectangle en H.

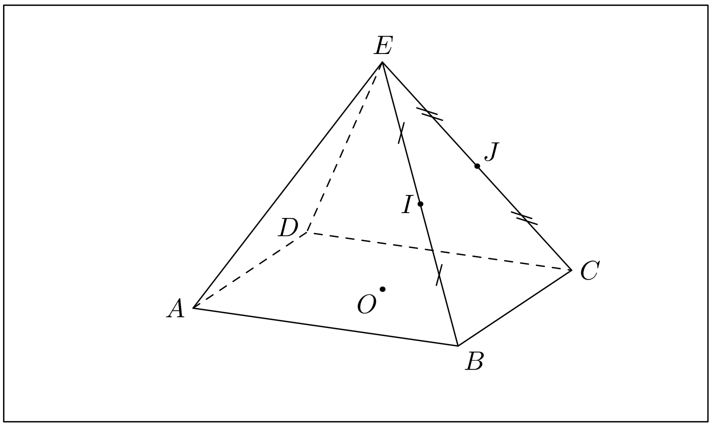
2. Les droites (AC) et (GH) sont sécantes en I

3. Le quadrilatère $BCHE$ est un rectangle.

4. J est le point d'intersection de (CG) et (AB)

Exercice 9

On considère la pyramide $ABCDE$ à base rectangulaire $ABCD$ représentée ci-dessous :

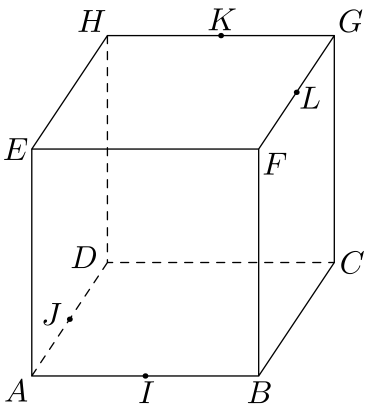


On note I et J les milieux respectifs des segments $[EB]$ et $[EC]$, et O le centre du rectangle $ABCD$.

1. a. Justifier que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
   b. Justifier que les droites (IJ) et (AD) sont parallèles.
2. Justifier que le droite (AD) est parallèle au plan (OIJ).

Exercice 10

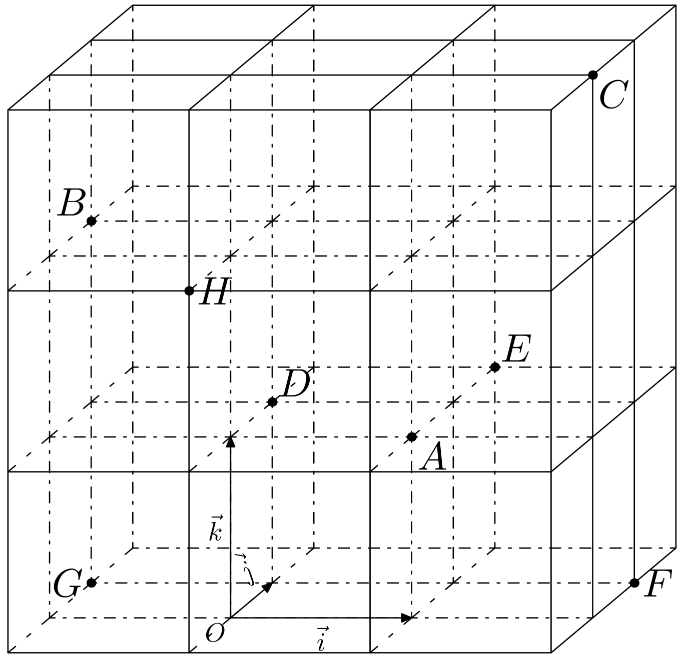
On considère le cube ci-dessous où les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AD]$, $[HG]$ et $[GF]$.



1. Justifier que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.
2. a. Justifier que les points H, D, B et F sont coplanaires.
   b. Justifier que les droites (HF) et (DB) sont parallèles.
   c. Démontrer que les points I, J, K, L sont coplanaires.
3. Quel est la nature du quadrilatère $IJKL$?

Exercice 11

L'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$; ce repère et le quadrillage associé est représenté ci-dessous :



Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H.