Terminale spécialité - Ch6: Vecteurs droites et plans de l'espace

Correction 1

1. a. L'ensemble des vecteurs égaux à $\overrightarrow{AJ}$ sont :
   $\overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{EL}$; $\overrightarrow{KG}$
   b. L'ensemble des vecteurs égaux à $\overrightarrow{ED}$ sont :
   $\overrightarrow{KJ}$; $\overrightarrow{FC}$
   c. L'ensemble des vecteurs égaux à $\overrightarrow{DK}$ sont :
   $\overrightarrow{JF}$
2. a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{LF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{AI}$
   b. $\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{DI}$
   c. $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GB}$

Correction 2

1. a. Les droites (EH) et (BC) sont strictement parallèles.
   b. Les droites (EB) et (FA) sont sécantes et perpendiculaires.
   c. Les droites (BA) et (EG) sont non-coplanaires.
   d. Les droites (EC) et (AG) sont sécantes et perpendiculaires.
2. a. La droite (EH) est au plan (AFG) sont strictement parallèles.
   b. La droite (HD) est au plan (FAG) sont sécants.
   c. La droite (FA) est au plan (DHG) sont strictement parallèles.
   d. La droite (BC) est au plan (HFA) sont sécants.
3. a. Les plans (HED) et (BCF) sont strictement parallèles.
   b. Les plans (HGA) et (DCB) sont sécants.

Correction 3

1. Voici les couples de droites coplanaires :
   a. (EA) et (FB) b. (HE) et (CB)
   d. (GA) et (CA)
2. Voici les couples d'objets parallèles :
   b. (EB) et (HGC) c. (EF) et (DC)
3. Voici les couples d'objets orthogonaux :
   a. (EF) et (HE) c. (HD) et (ABC)
   e. (AC) et (HDF)

Correction 4

1. Dans le repère $\left(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BF}\right)$, on a les coordonnées suivantes :

   $B\,(0\,;0\,;0)$; $C\,(1\,;0\,;0)$; $A\,(0\,;1\,;0)$
   $F\,(0\,;0\,;1)$; $E\,(0\,;1\,;1)$; $D\,(1\,;1\,;0)$
   $G\,(1\,;0\,;1)$; $H\,(1\,;1\,;1)$

2. Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$, on a les coordonnées suivantes :

   $A\,(0\,;0\,;0)$; $E\,(1\,;0\,;0)$; $B\,(0\,;1\,;0)$
   $D\,(0\,;0\,;1)$; $F\,(1\,;1\,;0)$; $C\,(0\,;1\,;1)$
   $G\,(1\,;1\,;1)$; $H\,(1\,;0\,;1)$; $O\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

3. Dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OG}\,;\overrightarrow{OE}\right)$, on a les coordonnées suivantes :

   $O\,(0\,;0\,;0)$; $F\,(1\,;0\,;0)$; $G\,(0\,;1\,;0)$
   $E\,(0\,;0\,;1)$; $D(-1\,;0\,;0)$; $A(0\,;-1\,;0)$
   $C(0\,;0\,;-1)$

   - Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OB}$:
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}&=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FB}\\&=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{EA}\\&=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OA}\\&=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OA}\end{aligned}$$
   On en déduit les coordonnées de $\overrightarrow{OB}(1\,;-1\,;-1)$; le point B a pour coordonnées :
   $B(1\,;-1\,;-1)$
   - On en déduit les coordonnées du point H :
   $H(-1\,;1\,;1)$

Correction 5

1. a. Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel k vérifiant :
   $$\vec{u}=k\cdot\vec{v}$$
   $$\vec{u}=\frac{3}{2}\cdot\vec{v}$$
   b. Le coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel k vérifiant :
   $$\vec{u}=k\cdot\vec{v}$$
   $$\vec{u}=\frac{5}{2}\cdot\vec{v}$$
2. Supposons qu'il existe un nombre α vérifiant les égalités :
   $$\vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}$$
   On en déduit :
   $$\alpha\cdot\vec{v}=\left(3\cdot\alpha\,;\frac{24}{5}\cdot\alpha\,;\frac{8}{5}\cdot\alpha\right)$$
   L'égalité de vecteur permet d'écrire le système suivant :
   $$\left\{\begin{array}{l}5=3\cdot\alpha\\8=\frac{24}{5}\cdot\alpha\\3=\frac{8}{5}\cdot\alpha\end{array}\right.\implies\left\{\begin{array}{l}\alpha=\frac{5}{3}\\\alpha=\frac{5}{3}\\\alpha=\frac{15}{8}\end{array}\right.$$
   Ce système n'admet pas de solution : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Correction 6

Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$, on a les coordonnées suivantes :

$I\left(\frac{1}{3};0;0\right)$; $J\left(0;\frac{2}{3};0\right)$; $K\left(\frac{1}{2};0;1\right)$; $H(0;1;1)$

On obtient les coordonnées suivantes de vecteurs :

- $\overrightarrow{IJ}\,(x_J-x_I\,;y_J-y_I\,;z_J-z_I)$
  $=\left(0-\frac{1}{3};\frac{2}{3}-0;0-0\right)=\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};0\right)$
- $\overrightarrow{HK}\,(x_K-x_H\,;y_K-y_H\,;z_K-z_H)$
  $=\left(\frac{1}{2}-0;0-1;1-1\right)=\left(\frac{1}{2};-1;0\right)$

De l'égalité vectorielle $\overrightarrow{IJ}=-\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{HK}$, on en déduit que ces deux vecteurs sont colinéaires.

Ainis, les deux droites (IJ) et (HK) sont donc parallèles.

Correction 7

1.
- Les diagonales du carré étant orthogonales, de même longueur et s'interceptant en leur milieu, on en déduit :
  $(OB)\perp(OC)$; $OB=OC=1$
- La pyramide $SABCD$ étant régulière, S le somme de la pyramide, O le centre de la base, on en déduit que la droite (OS) est orthogonale au plan (ABC) : la droite (OS) est orthogonale à toutes les droites du plan (ABC).
  En particulier : $(OB)\perp(OS)$; $(OC)\perp(OS)$
  Ici, on peut affirmer que le repère $\left(O;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS}\right)$ est orthogonal.
- Montrons que $SO=1$:
  - Dans le triangle AOB rectangle en O, à l'aide du théorème de Pythagore, on a :
    $AB^2=OA^2+OB^2$
    $AB^2=1^2+1^2$
    $AB^2=2$
    $AB=\sqrt{2}$
  - D'après l'énoncé, la face ABS est un triangle équilatéral. On en déduit : $SB=\sqrt{2}$.
  - Dans le triangle rectangle SOB rectangle en O, à l'aide du théorème de Pythagore, on a :
    $BS^2=SO^2+OB^2$
    $(\sqrt{2})^2=SO^2+1^2$
    $2=SO^2+1$
    $SO^2=1$
    $SO=1$

  On vient d'établir que $OB=OC=OS$: le repère est orthonormé.

2. a. On a les coordonnées des points :
$S(0;0;1)$; $D(-1;0;0)$

On en déduit les coordonnées du vecteur :

$\overrightarrow{SD}(x_D-x_S\,;y_D-y_S\,;z_D-z_S)$

$\overrightarrow{SD}(-1-0;0-0;0-1)$

$\overrightarrow{SD}(-1;0;-1)$

$\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{SD}\left(-\frac{1}{3};0;-\frac{1}{3}\right)$

Or, les coordonnées du vecteur SK s'expriment par :

$\overrightarrow{SK}(x_K-x_S\,;y_K-y_S\,;z_K-z_S)$

$\overrightarrow{SK}(x_K\,;y_K\,;z_K-1)$

L'égalité vectorielle $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{SD}$ permet d'obtenir le système :

$$\begin{cases} x_K = -\frac{1}{3} \\ y_K = 0 \\ z_K-1 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

On en déduit les coordonnées du point K :

$K\left(-\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right)$

b. Les coordonnées du point I sont obtenues par :

$I\left(\frac{x_O+x_S}{2};\frac{z_O+z_S}{2};\frac{z_O+z_S}{2}\right)=\left(\frac{0+0}{2};\frac{0+0}{2};\frac{0+1}{2}\right)$

$=\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$

Déterminons les coordonnées des deux vecteurs :

- $\overrightarrow{BI}\,(x_I-x_B\,;y_I-y_B\,;z_I-z_B)$
  $=\left(0-1;0-0;\frac{1}{2}-0\right)=\left(-1;0;\frac{1}{2}\right)$
- $\overrightarrow{BK}\,(x_K-x_B\,;y_K-y_B\,;z_K-z_B)$
  $=\left(-\frac{1}{3}-1;0-0;\frac{2}{3}-0\right)=\left(-\frac{4}{3};0;\frac{2}{3}\right)$

En remarquant l'égalité $\frac{4}{3}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BK}$, on établit que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires : les points B, I et K sont alignés.

c. Les points B, I et K étant alignés, on en déduit que le point K est un point du plan (BCI).
Ainsi, les plans (BCI) et (SDA) sont sécants selon une droite (d) passant par le point K.
De plus, les plans (BCI) et (SDA) contiennent respectivement les droites (AD) et (BC) parallèles entre elles. D'après le théorème du toit, la droite (d) est parallèle à la droite (DA).

La droite (d) appartient au plan (BCI) et parallèle à la droite (DA) passant par le point K intercepte la droite (SA) en un point : ce point est le point L.

La droite (d) étant la droite (KL), on en déduit que les droites (AD) et (KL) sont parallèles entre elles.

d. Les points S, K, D, L et A sont coplanaires. De plus, les points S, K, D et les points S, L, A sont alignés.
Les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a les égalités de rapports de longueurs :

$\frac{SK}{SD}=\frac{SK}{SL}=\frac{KL}{DA}$

Utilisons l'égalité :

$\frac{SK}{SD}=\frac{KL}{DA}$

Le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{SK}$ et $\overrightarrow{SD}$:

$\frac{1}{3}=\frac{KL}{DA}$

$KL=\frac{1}{3}\cdot DA$

Les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{DA}$ étant colinéaires et de même sens, on en déduit :

$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DA}$

On a les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{KL}\,(x_L-x_K\,;y_L-y_K\,;z_L-z_K)$

$$=\left(x_L-\left(-\frac{1}{3}\right);y_L-0\,;z_L-\frac{2}{3}\right)=\left(x_L+\frac{1}{3}\,;y_L\,;z_L-\frac{2}{3}\right)$$

- $\overrightarrow{DA}\,(x_A-x_D\,;y_A-y_D\,;z_A-z_D)$

  $=\big(0-(-1)\,;-1-0\,;0-0\big)=(1\,;-1\,;0)$

  Ainsi : $\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DA}\left(\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{1}{3}\,;0\right)$

De l'égalité vectorielle précédente, on en déduit les coordonnées du point L :

$L\left(0\,;-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right)$

Correction 8

1. La face $AEHD$ est un carré : l'angle $\widehat{DHE}$ est un angle droit.
Le triangle EHD est un triangle rectangle.

2. La droite (AC) appartient au plan (ABC) et la droite (HG) appartient au plan (EHG) : les deux droites ne peuvent pas être sécantes.

3. Les deux droites (DH) et (BF) sont parallèles, on en déduit que les quatre points D, B, F et H sont coplanaires : ces quatre points forment un quadrilatère.

   Le plan (ABC) est orthogonal à la droite (BF) : on obtient en particulier que $(BD)\perp(BF)$. On montre de même que les quatre angles du quadrilère $DBHF$ sont droits : ce quadrilatère est un rectangle.

4. La droite (CG) appartient au plan (DHG) et la droite (AB) appartient au plan (ABF). Or, les deux plans (DHG) et (ABF) sont parallèles : on en déduit que les droites (CG) et (AB) ne peuvent pas être sécantes.

Correction 9

1. a. Dans le triangle BCE, le point I est le milieu du segment $[BE]$ et le point J est le milieu du segment $[CE]$.
Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au troisième côté.
On a : $(IJ)/\!/(BC)$.

   b. $(IJ)/\!/(BC)$ et $(BC)/\!/(AD)$.
Si deux droites sont parallèles à une troisième droite alors ces deux droites sont parallèles entre elles.
On en déduit que les droites (IJ) et (AD) sont parallèles.

2. La droite (AD) est parallèle à la droite (IJ).
Si deux droites sont parallèles entre elles et si l'une est contenue dans un plan alors la seconde est parallèle à ce plan.
La droite (AD) est parallèle au plan (OIJ).

Correction 10

1. Travaillons dans le plan (ADB).

   I est le milieu du segment $[AB]$ et J est le milieu du segment $[AD]$.
Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au second côté.
On en déduit que les droites (IJ) et (DB) sont parallèles.

2. a. Les arêtent $[HD]$ et $[BF]$ sont parallèles entre elles : on en déduit que les points H, D, B et F sont coplanaires.

   b. Les plans (HEG) et (DAC) sont deux plans parallèles car ils ont pour support deux faces opposés du cube.
Ainsi, le plan (HDF) intercepte ces deux plans en deux droites parallèles entre elles : les droites (EF) et (DB) sont parallèles entre elles.

   c. La question 1. a permis d'affirmer que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.
Le théorème des milieux permet également d'affirmer dans le triangle (HF) que les droites (KL) et (HF) sont parallèles.

   La question précédente permet d'affirmer que les droites (KL) et (IJ) sont parallèles entre elles.

3. Connaissant le théorème suivant :
Si, dans un triangle, un segment relie les milieux de deux côtés alors ce segment mesure la moitié du troisième côté.
En utilisant ce théorème, on obtient les relations suivantes :
$IJ=\dfrac{1}{2}\cdot BD\quad;\quad KL=\dfrac{1}{2}\cdot FH.$

   Les segments $[HF]$ et $[DB]$ forment la diagonale de carrés de même côté : ces deux segments ont la même mesure. On en déduit la relation :
$IJ=KL.$

   On a : $IJ=KL\quad;\quad(IJ)=(KL).$
Si un quadrilatère a deux de ses côtés opposés parallèles et de même longueur alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
$IJKL$ est un parallélogramme.

   On montre facilement l'égalité des longueurs $IK=JL$.
Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors ce quadrilatère est un rectangle.
Le quadrilatère $IJKL$ est un rectangle.

Correction 11

Voici les coordonnées des points recherchés :

$A(1\,;0\,;1)\quad;\quad B(-1\,;1\,;2)\quad;\quad C(2\,;0\,;3)$

$D(0\,;1\,;1)\quad;\quad E(1\,;2\,;1)\quad;\quad F(2\,;1\,;0)$

$G(-1\,;1\,;0)\quad;\quad H(0\,;-1\,;2)$

