Schéma de Bernoulli

I Répétition d'expériences indépendantes

Définition 1
Plusieurs expériences sont ***identiques et indépendantes*** *si :*

- Elles ont les mêmes issues

- Les probabilités de chacune des issues ne changent pas d'une expérience à l'autre

Exemple 1
On lance 15 fois un dé et on note à chaque fois le résultat visible sur la face du haut.

On tire au hasard un carte dans un jeu de 32 carte et on la remet dans le paquet. On répète cette expérience 5 fois de suite.

Exercice 1
Une urne contient 7 boules vertes et 4 boules bleues. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences à l'aide d'un arbre

2) Calculer la probabilité :

a) D'obtenir deux boules vertes

b) D'obtenir deux boules de couleurs différentes

c) D'obtenir au moins une boule bleue

Propriété 1
Lorsque l'on répète n fois de façon indépendante une expérience aléatoire dont les issues $A_1, A_2, ..., A_n$ ont pour probabilité $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$, alors la probabilité d'obtenir la suite d'issues $(A_1, A_2, ..., A_n)$ est égale au produits de leurs probabilités $P(A_1) \times P(A_2) \times ...P(A_n)$

Exemple 2
On lance 5 fois de suite un dé à 6 faces et on considère les évènements suivants :

A : Obtenir un 1

B : Obtenir un nombre impair

C : Obtenir un 3 ou un 4

Calculer la probabilité d'obtenir la suite d'issue $(A; C; B; A)$

II Epreuve de Bernoulli

Définition 2
*Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à 2 issues que l'on peut nommer "succès" et "échec"*

Exemple 3
1) On lance une pièce et on considère par exemple que le succès est d'obtenir face et que l'échec est d'obtenir pile

2) On lance un dé à 6 faces et on considère par exemple que le succès est d'obtenir la face 3 et que l'échec est de ne pas obtenir la face 3

Définition 3
*Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :*

- La probabilité d'obtenir un succès vaut p

- La probabilité d'obtenir un échec vaut $1 - p$

Exemple 4
Dans l'exemple précédent, donner les probabilités du succès et de l'échec des deux expériences.

III Schéma de Bernoulli, loi binomiale

1) Schéma de Bernoulli

Définition 4
*Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p*

Exemple 5
Si l'on lance 25 fois une pièce de monnaie, on obtient un schéma de Bernoulli de paramètres $n =$ .... et $p =$ ....

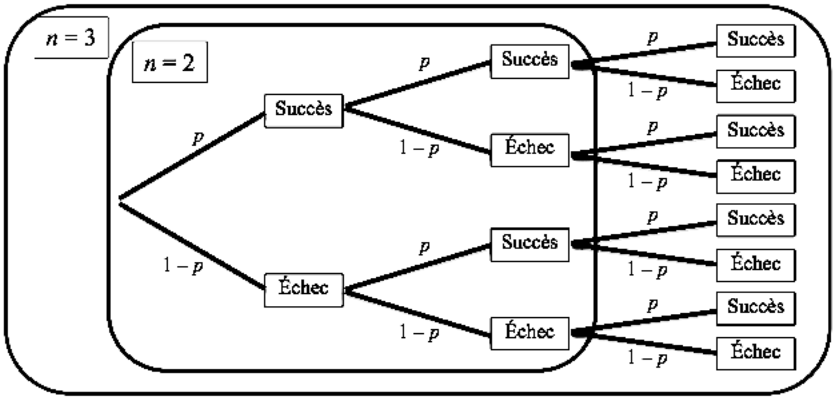
2) Loi binomiale

Définition 5
On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Une ***loi binomiale*** *est une loi de probabilité définie sur l'ensemble $\{0; 1; 2; ...; n\}$ et qui donne le nombre de succès de l'expérience*

Remarque
n et p sont les paramètres de la loi binomiale et on note $B(n; p)$

Exemple 6
On a représenté un arbre de probabilité d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



On a par exemple :

$P(X = 3) =$

Car en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité égale à ....

$X = 2$ correspond aux suites d'issues suivantes : $(S; S; E)$, $(S; E; S)$ et $(E; S; S)$, donc

$P(X = 2) =$

3) Expression de la loi binomiale à l'aide des coefficients binomiaux

Définition 6
On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Soit un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$

On appelle ***coefficient binomial*** *ou* ***combinaison de k parmi n*** *le nombre de chemins conduisants à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.*

Ce nombre est noté : $\binom{n}{k}$

Exemple 7
Dans l'exemple précédent, combien y a t'il de chemins conduisants à 2 succès parmi les 2 épreuves ? ....

Donc on en déduit que $\binom{3}{2} =$ ....

Propriété 2
On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

On associe à l'expérience la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n;p)$

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$:

$\boldsymbol{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$

Démonstration
EXIGIBLE

On peut calculer les coefficients binomiaux à l'aide du **triangle de pascal**

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1			1			
4	1				1		
5	1					1	
6	1						1

Exercice 2
Une urne contient 4 boules rouges et 7 boules noires.

Si la boule tirée est rouge, alors on a gagné.

Une eexpérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre dans l'urne.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages gagnants.

1) Prouver que X suit une loi binomiale dont on donnera ses paramètres

2) Déterminer la loi de probabilité de X

3) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules rouges

4) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge