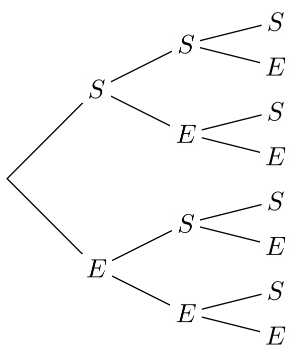
Exercices : Schéma de Bernoulli

Exercice 1

On considère une épreuve admettant que deux issues : une nommé "*succès*" et noté S de probabilité 0,4 ; l'autre nommé "*échec*" et notée E.

On décide de répeter trois fois cette même épreuve. On obtient l'arbre de probabilité ci-contre.

On suppose ces répétitions indépendantes entre elles.



1. Compléter cet arbre de probabilité?
2. a. Combien de chemins comportent 3 succès?
   b. Donner la probabilité d'obtenir trois succès à l'issue de cette expérience aléatoire?
3. a. Combien de chemins comportent 0 succès?
   b. Donner la probabilité de n'obtenir aucun succès à l'issue de cette expérience aléatoire?
4. a. Combien de chemins comportent 2 succès?
   b. Donner la probabilité d'obtenir exactement deux succès à l'issue de cette expérience aléatoire?

Exercice 2

Soit $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 15 et 0,35. C'est à dire : $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(15\,;0{,}35)$

Déterminer la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=7)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

Exercice 3

Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

Déterminer la probabilité exacte pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie, puis sa valeur arrondie au centième.

Exercice 4

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètre $n=15$ et $p=0{,}63$.

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux suivants :

   a. $\binom{15}{13}$ b. $\binom{15}{14}$ c. $\binom{15}{15}$

2. Déterminer la valeur exacte des probabilités suivantes, puis arrondie à 10^{-4} près :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=13)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=14)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=15)$

3. En déduire la valeur, arrondie à 10^{-4} près, de la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X}\leqslant 12\}$.

Exercice 5

Lors d'une épidémie chez des bovins, un test de cette maladie est mis en place. Une étude est faite sur ce troupeau et la probabilité que le test soit positif sur un animal de ce troupeau est de 0,058.

On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$?
2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif? On donnera la valeur exacte et la valeur approchée au millième.

Exercice 6

Un concours sportif est organisé, chaque année, pour relier deux villages le plus rapidement possible. Plusieurs moyens de déplacement sont possibles :

à vélo ; en roller ; à pied.

On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres. L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\dfrac{2}{3}$.

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent "*non cycliste*". Donner également la valeur approchée au millième de cette probabilité.

Exercice 7

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 20 et 0,2.

On répondra aux questions à l'aide de la calculatrice. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

2. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 9)$

Exercice 8

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites *(A, B et C)*, une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot "*BBAAC*" signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. Combien y-a-t-il de mots-réponses possible à ce ques-

tionnaire?

2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

a. E : “*le candidat a exactement une réponse exacte.*”.

b. F : “*le candidat n'a aucune réponse exacte*”.

c. G : “*le mot-réponse du candidat est un palindrome*”. *(On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, “$BACAB$” est un palindrome)*

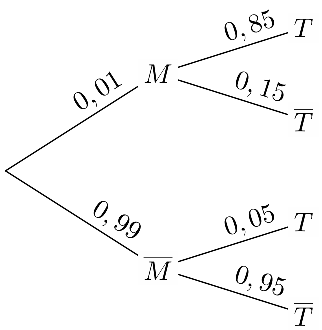
Exercice 9

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux.

On note les évènements :

- M : “*l'animal est porteur de la maladie*” ;
- T : “*le test est positif*”.

Voici l'arbre de probabilité obtenu après l'étude du cheptail :



1. Un animal est choisi au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif?

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

2. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$? Justifier.

b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif? On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième près.

3. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subbissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ associant à un animal le coût à engager.

b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager?

Exercice 10

On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

1. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

2. Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2)$.

3. Donner l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice 11

Une usine produit des sacs. On suppose que la probabilité *(arrondie au centième)* qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Quelle est la probabilité de l'évènement “*au moins un sac est défectueux*”? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Exercice 12

Un examen est basé sur un QCM comportant 5 questions où chaque question propose quatre choix de réponse parmi lesquelles une seule réponse est correcte.

Un élève décide de compléter de manière aléatoire et indépendante chacune des questions du questionnaire.

1. Quelle est la probabilité de répondre correctement à une question?

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de réponses correctes contenues dans le formulaire rempli.

2. Déterminer les probabilités suivantes arrondies au millième près :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{\leqslant}3)$

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité, arrondie au millième, que l'élève ait au plus 2 réponses justes.

Exercice 13

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.

Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.

   a. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.

   b. Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.

2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.

   Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.

Exercice 14

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :

   - A_1 l'évènement "*la personne est absente lors du premier appel*" ;
   - R_1 l'évènement "*la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel*".

   Quelle est la probabilité de R_1?

2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.

   Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

   On note :

   - A_2 l'évènement "*la personne est absente lors du second appel*" ;
   - R_2 l'évènement "*la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel*" ;
   - R l'évènement "*la personne accepte de répondre au questionnaire*".

   Montrer que la probabilité de R est 0,176 *(On pourra utiliser un arbre).*

3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel?

Exercice 15

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,049 4.

2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

   a. Définir la loi de $\mathcal{X}$.

   b. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$. Pour l'entreprise, quelle interprétation peut-on faire de cette espérance?