

DEVOIR MAISON n°3  
Terminale spécialité mathématiques

Dns un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeur.

Partie 1 :

On a observé que :

- si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
- si un manchot choisit le plongeur, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.

Lors du premier passage, le manchot choisira le toboggan avec une probabilité de 0.6

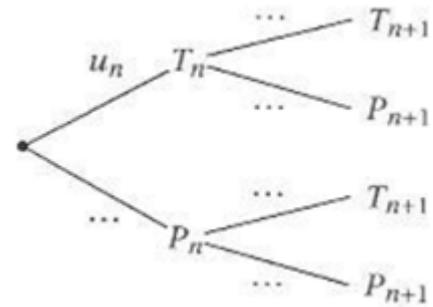
Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère l'événement :

$T_n$  : " Le manchot utilise le toboggan lors de son  $n$ -ième passage."

$P_n$  : " Le manchot utilise le plongeur lors de son  $n$ -ième passage."

On considère alors la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :  $u_n = p(T_n)$  où  $p(T_n)$  est la probabilité de l'événement  $T_n$ .

1. a. A l'aide éventuellement d'un arbre représentant la situation lors des 2 premiers passages, montrer que  $p(T_2) = 0.26$ .
- b. Recopier et compléter l'arbre suivant :



- c. Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  
 $u_{n+1} = 0,1 u_n + 0,2$ .

1. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :  $v_n = u_n - \frac{2}{9}$ 
  - a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
  - b. Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. Conjecturer la limite de la suite  $(u_n)$ . Interpréter le résultat

Partie 2 :

Dans cette partie on suppose maintenant que le manchot utilise le toboggan au 1<sup>er</sup> passage avec une probabilité de 0.6

On regarde ce que fait le manchot chaque jour pendant 15 jours lors de son premier passage (on suppose que les choix du manchot sont indépendants chaque jour)

On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de jours où le manchot prend le toboggan au 1<sup>er</sup> passage

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par  $X$
2. Calculer la probabilité que le manchot prenne le toboggan au 1<sup>er</sup> passage 8 jours
3. Déterminer la probabilité que le manchot prenne le toboggan au moins 5 jours
4. Calculer  $E(X)$  et interpréter dans le contexte de l'exercice