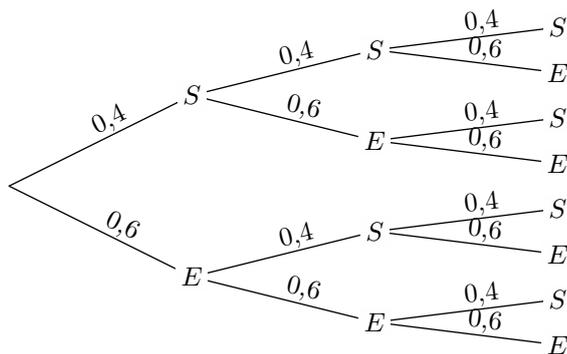


Exercices : Schéma de Bernoulli

Correction 1

1. Voici l'arbre de probabilité complété :



- Il n'y a qu'un chemin comportant 3 succès.
 - La probabilité de ce chemin est de : $0,4^3 = 0,064$
- Il n'existe qu'un seul chemin comportant aucun succès.
 - La probabilité de n'obtenir aucun succès est de : $0,6^5 = 0,216$
- Il y a trois chemins comportant exactement deux succès (*donc nécessairement un seul échec*).
 - Chacun de ces chemins a une probabilité de : $0,4^2 \times 0,6 = 0,096$
Or, d'après la question a., il y a trois de ces chemins qui présentent deux succès. Ainsi, la probabilité totale d'obtenir deux succès lors de cette expérience aléatoire est de : $3 \times 0,096 = 0,288$

Correction 2

- $\mathcal{P}(X=5) = \binom{15}{5} \cdot 0,35^5 \cdot (1 - 0,35)^{10}$
 $= 3003 \times 0,35^5 \times 0,65^{10}$
 $\approx 0,21233 \approx 0,212$
- $\mathcal{P}(X=7) = \binom{15}{7} \cdot 0,35^7 \cdot (1 - 0,35)^8$
 $= 6435 \times 0,35^7 \times 0,65^8$
 $\approx 0,13192 \approx 0,132$
- $\mathcal{P}(X=9) = \binom{15}{9} \cdot 0,35^9 \cdot (1 - 0,35)^6$
 $= 5005 \times 0,35^9 \times 0,65^6$
 $\approx 0,02975 \approx 0,030$

Correction 3

La probabilité de perdre est de $\frac{1}{6}$: c'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$. La partie étant constituée de 5 lancers indépendants, nous pouvons modéliser ce jeu par un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et $\frac{1}{6}$. La variable aléatoire \mathcal{X} comptant pour chaque partie le nom-

bre de parties perdues suit une loi binomiale de paramètre 5 et $\frac{1}{6}$: $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{1}{6}\right)$.

La probabilité que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X=3) &= \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-3} \\ &= 10 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,032 \approx 0,03 \end{aligned}$$

Correction 4

1. Voici les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice :

a. $\binom{15}{13} = 105$ b. $\binom{15}{14} = 15$ c. $\binom{15}{15} = 1$

2. Voici la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^4 près des probabilités demandées :

- $\mathcal{P}(X=13) = \binom{15}{13} \times 0,63^{13} \times 0,37^2 = 105 \times 0,63^{13} \times 0,37^2$
 $\approx 0,035401 \approx 0,0354$
- $\mathcal{P}(X=14) = \binom{15}{14} \times 0,63^{14} \times 0,37 = 15 \times 0,63^{14} \times 0,37$
 $\approx 0,008611 \approx 0,0086$
- $\mathcal{P}(X=15) = \binom{15}{15} \times 0,63^{15} = 1 \times 0,63^{15}$
 $\approx 0,0009774 \approx 0,0010$

3. Des résultats précédents, on obtient :
 $\mathcal{P}(X \geq 13) = \mathcal{P}(X=13) + \mathcal{P}(X=14) + \mathcal{P}(X=15)$
 $\approx 0,0354 + 0,0086 + 0,0010 = 0,045$

Les deux événements $\{X \leq 12\}$ et $\{X > 12\}$ sont complémentaires, on en déduit la propriété :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X \leq 12) &= 1 - \mathcal{P}(X > 12) = 1 - \mathcal{P}(X \geq 13) \\ &\approx 1 - 0,045 = 0,955 \end{aligned}$$

Correction 5

1. La probabilité de choisir un animal avec un test positif est de 0,058. Ainsi, tirer au hasard un animal du trapeau est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,058.

D'après l'énoncé, le choix des 5 animaux peut être assimilé à un tirage avec remise. Le tirage de ces 5 animaux est un schéma de Bernoulli de paramètre 5 et 0,058.

Notons \mathcal{X} la variable aléatoire comptant le nombre d'animaux ayant un test positif sur ce schéma. Elle suit une loi binomiale de paramètre 5 et 0,058 :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(5; 0,058)$$

2. Les deux événements $\{X < 1\}$ et $\{X \geq 1\}$ sont complémentaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X \geq 1) &= 1 - \mathcal{P}(X < 1) = 1 - \mathcal{P}(X=0) \\ &= 1 - \binom{5}{0} \times 0,058^0 \times 0,942^5 = 1 - 0,942^5 \\ &\approx 0,258255 \approx 0,258 \end{aligned}$$

Correction 6

Considérons l'évènement A "le gagnant est non-cycliste".

D'après l'énoncé, l'évènement A a une probabilité de $\frac{1}{3}$. C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

Les résultats étant indépendants d'une année à l'autre, le fait de regarder le moyen de transport du vainqueur sur 6 années consécutives est modéliser par un schéma de Bernoulli de paramètres 6 et $\frac{1}{3}$.

La variable \mathcal{X} comptant le nombre de succès dans ce schéma suit une loi binomiale de paramètre 6 et $\frac{1}{3}$:

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\left(6; \frac{1}{3}\right)$$

Ainsi, l'évènement "l'épreuve est remportée au moins une fois par un concurrent non-cycliste" se traduit par l'ensemble $\{\mathcal{X} \geq 1\}$.

De plus, les évènements $\{\mathcal{X} < 1\}$ et $\{\mathcal{X} \geq 1\}$ sont complémentaires. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 1) &= 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} < 1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} = 0) \\ &= 1 - \binom{6}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 \\ &\approx 0,912208 \approx 0,912 \end{aligned}$$

Correction 7

1. a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5) \approx 0,1746 \approx 0,175$

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9) \approx 0,0073 \approx 0,007$

2. a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 5) \approx 0,8042 \approx 0,804$

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 9) \approx 0,9974 \approx 0,997$

Correction 8

1. Le choix des réponses dans ce questionnaire correspond à un tirage avec remise à cinq tirages à trois choix.

Ainsi, le nombre de réponses possibles sont au nombre de :

$$3^5 = 243$$

2. Chaque question comporte 3 réponses dont une seule est juste : le choix d'une réponse au hasard et savoir si la réponse est correcte constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

Le candidat choisissant au hasard ses réponses indépendamment aux 5 questions, ce choix est assimilable à un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et $\frac{1}{3}$.

Notons \mathcal{X} la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses donnés par le candidat. La variable \mathcal{X} suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{3}$:

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{1}{3}\right)$$

Ainsi, on a les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$$= 5 \times \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

b. $\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

c. Pour créer un tel palindrome, il suffit de choisir les

trois premières lettres : les deux dernières sont alors imposées par les deux premières.

Ainsi, le nombre de palindromes dépend du nombre de possibilités sur les trois premières lettres :

$$3^3$$

Ainsi, on a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(G) = \frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Correction 9

1. a. La probabilité qu'un animal choisi au hasard soit porteur de la maladie et que son test soit positif a pour valeur :

$$\mathcal{P}(M \cap T) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085$$

b. Les évènements M et \bar{M} forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$T = (M \cap T) \cup (\bar{M} \cap T)$$

Ces ensembles étant disjoints deux à deux, on en déduit la probabilité :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(T) &= \mathcal{P}(M \cap T) + \mathcal{P}(\bar{M} \cap T) \\ &= 0,01 \times 0,85 + 0,99 \times 0,05 = 0,0085 + 0,0495 = 0,058 \end{aligned}$$

2. a. Le fait de choisir au hasard un animal et de regarder si son test est positif est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,058.

Les cinq répétitions étant associés à un tirage à avec remise, nous sommes dans un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et 0,058.

La variable \mathcal{X} comptant le nombre de "succès" dans ce schéma de Bernoulli, elle suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0,058 :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(5; 0,058)$$

b. L'évènement "au moins un des cinq animaux ont un test positif" se traduit par l'ensemble $\{\mathcal{X} \geq 1\}$.

Or, les deux ensembles $\{\mathcal{X} < 1\}$ et $\{\mathcal{X} \geq 1\}$ sont complémentaires :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} < 1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} = 0)$$

$$= 1 - \binom{5}{0} \times 0,058^0 \times (1 - 0,058)^5$$

$$= 1 - 1 \times 1 \times 0,942^5$$

$$\approx 0,258255 \approx 0,258$$

3. a. En notant \mathcal{Z} la variable aléatoire associant à chaque animal le coût du soin à associer a pour espérance :

$$E(\mathcal{Z}) = 0 \times \mathcal{P}(\mathcal{Z}=0) + 100 \times \mathcal{P}(\mathcal{Z}=100) + 1000 \times \mathcal{P}(\mathcal{Z}=1000)$$

$$= 100 \times 0,058 + 1000 \times 0,0015 = 7,3$$

b. Ainsi, en possédant un troupeau de 200 bêtes, l'éleveur doit préparer la somme de :

$$200 \times 7,3 = 1460 \text{ €}.$$

Correction 10

1. La probabilité d'obtenir la face 6 est de $\frac{1}{6}$ car on utilise un dé équilibré : c'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

Les trois lancers de dé étant indépendant les uns des autres, nous pouvons assimiler ces trois lancers à un schéma de Bernoulli de paramètre 3 et $\frac{1}{6}$.

Notons \mathcal{X} la variable aléatoire comptant le nombre d'appartenance de la face 6. Elle suit une loi binomiale

de paramètre 3 et $\frac{1}{6}$: $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\left(3; \frac{1}{6}\right)$

2. La variable aléatoire \mathcal{X} suivant une loi binomiale, on obtient la valeur de la probabilité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

$$\approx 0,069444 \approx 0,0694$$

3. Les propriétés des variables aléatoires suivant une loi binomiale permettent d'obtenir directement l'espérance de celle-ci :

$$E(\mathcal{X}) = n \times p = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Correction 11

1. La probabilité de choisir un sac défectueux est de 0,03. Ainsi, le fait de tirer au hasard un sac et de regarder s'il est défectueux ou non est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,03.

La production étant suffisamment grande pour supposer le prélèvement de 100 sacs à un tirage avec remise, on modélise ce prélèvement par un schéma de Bernoulli de paramètre 100 et 0,03.

La variable aléatoire \mathcal{X} comptant le nombre de sacs défectueux sur ce prélèvement, elle suit une loi binomiale de paramètre 100 et 0,03.

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(100; 0,03)$$

2. L'évènement "au moins un sac est défectueux" est caractérisée par des valeurs de la variable aléatoire \mathcal{X} supérieure ou égale à 1. Ainsi, la probabilité recherchée est $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 1)$.

Les deux évènements $\{\mathcal{X} < 1\}$ et $\{\mathcal{X} \geq 1\}$ sont complémentaires. On en déduit :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} < 1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} = 0)$$

$$= 1 - \binom{100}{0} \times 0,03^0 \times 0,97^{100} = 1 - 0,97^{100}$$

$$\approx 0,95244 \approx 0,95$$

Cela signifie que sur un lot de 100 sacs, il y a 95 % de chances d'avoir au moins un sac qui soit défectueux.

3. Les propriétés des variables aléatoires suivant une loi binomiale permettent d'obtenir directement l'espérance de la variable aléatoire \mathcal{X} :

$$E(\mathcal{X}) = n \times p = 100 \times 0,03 = 3$$

Ainsi, par prélèvement de 100 sachets, en moyenne on trouvera 3 sachets défectueux.

Correction 12

1. La réponse à une question s'effectuant aléatoirement est assimilable à une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$.

2. Répondant aux questions de manière aléatoire et indépendante, les réponses aux 5 questions est modélisable par un schéma de Bernoulli de paramètre 5 et $\frac{1}{4}$.

L'élève choisissant sa réponse de manière aléatoire et chaque question comportant une bonne réponse et trois mauvaises réponses, la probabilité de répondre correctement à une question est de $\frac{1}{4}$.

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{1}{4}\right).$$

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5) = \binom{5}{5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times 1$

$$\approx 0,000976 \approx 0,001$$

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=4) = \binom{5}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \frac{3}{4}$

$$\approx 0,01464 \approx 0,015$$

Par complémentarité, on en déduit la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 3) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} > 3) = 1 - [\mathcal{P}(\mathcal{X}=4) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=5)]$$

$$= 1 - (0,015 + 0,001) = 1 - 0,016 = 0,984$$

3. Voici les deux captures d'écran nécessaire sur une calculatrice Casio pour obtenir la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X} \leq 2\}$:

```
Binomial C.D
Data : Variable
x : 2
Numtrial : 5
P : 0.25
Save Res : None
Execute
```

```
Binomial C.D
P=0.89648437
```

On en déduit : $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2) = 0,896$

Correction 13

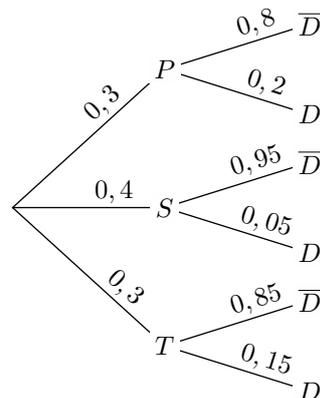
1. a. Pour le choix du fournisseur, on note les évènements suivants :

- P : "Le pneu tiré vient du premier fournisseur" ;
- S : "Le pneu tiré vient du second fournisseur" ;
- T : "Le pneu tiré vient du troisième fournisseur".

Pour qualifier la qualité du pneu, on note les deux évènements suivants :

- D : "Le pneu a des défaut" ;
- \bar{D} : "Le pneu est sans défaut".

Voici l'arbre de probabilité obtenu en utilisant directement les données de l'énoncé :



D'après la formule des probabilités totale, on a :

$$\mathcal{P}(\bar{D}) = \mathcal{P}(\bar{D} \cap P) + \mathcal{P}(\bar{D} \cap S) + \mathcal{P}(\bar{D} \cap T)$$

$$= 0,3 \times 0,8 + 0,4 \times 0,95 + 0,3 \times 0,85$$

$$= 0,16 + 0,38 + 0,255 = 0,875$$

- b. D'après l'arbre de probabilités, on a :

$$\mathcal{P}(\bar{D} \cap S) = \mathcal{P}_S(\bar{D}) \cdot \mathcal{P}(S) = 0,95 \times 0,4 = 0,38$$

Par définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathcal{P}_{\bar{D}}(S) = \frac{\mathcal{P}(\bar{D} \cap S)}{\mathcal{P}(\bar{D})} = \frac{0,38}{0,875} \approx 0,434$$

2. Notons D l'évènement "le pneu est sans défaut". On a d'après la question 1. a. :

$$\mathcal{P}(D) = 1 - \mathcal{P}(\bar{D}) = 1 - 0,875 = 0,125$$

Ainsi, choisir un pneu dans le stock et regarder s'il

est avec un défaut est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,125.

Or, le stock étant suffisamment grand, le choix de ces 10 pneus peut être assimilé à un schéma de Bernoulli de paramètres n et 10.

Notons \mathcal{X} la variable aléatoire comptant le nombre de pneus présentant un défaut. Elle suit une loi binomiale de paramètre 10 et 0,125 :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(10; 0,125)$$

La probabilité de tirer au plus un pneu présentant un défaut donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1) &= \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) \\ &= \binom{10}{0} \times 0,125^0 \times (1-0,125)^{10} + \binom{10}{1} \times 0,125^1 \times (1-0,125)^9 \\ &= 0,875^{10} + 10 \times 0,125 \times 0,875^9 \approx 0,639 \end{aligned}$$

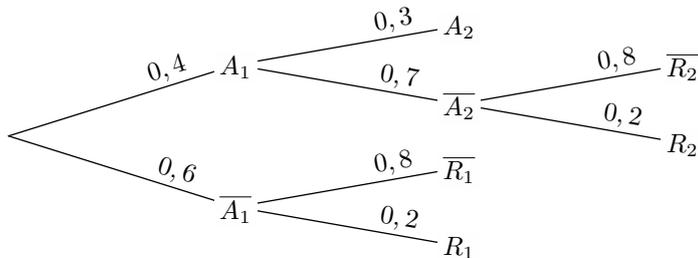
Correction 14

1. On a l'égalité suivante : $R_1 = \overline{A_1} \cap R_1$

De la définition des probabilités conditionnelles, on obtient :

$$\mathcal{P}(\overline{A_1} \cap R_1) = \mathcal{P}(\overline{A_1}) \times \mathcal{P}_{\overline{A_1}}(R_1) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$$

2. On obtient le tableau de probabilité suivant :



- De l'égalité $R_1 = \overline{A_1} \cap R_1$, on en déduit la probabilité de R_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(R_1) &= \mathcal{P}(R_1 \cap \overline{A_1}) = \mathcal{P}(\overline{A_1}) \times \mathcal{P}_{\overline{A_1}}(R_1) \\ &= 0,6 \times 0,2 = 0,12 \end{aligned}$$

- A l'aide des probabilités conditionnelle, on a :

$$\mathcal{P}(A_1 \cap \overline{A_2}) = \mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}_{A_1}(\overline{A_2}) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$$

La personne répond au questionnaire au second appel si, et seulement si, il était absent lors du premier appel et présent lors du second appel ; ainsi, on a :

$$R_2 = A_1 \cap \overline{A_2} \cap R_2 = \overline{A_2} \cap R_2$$

Ainsi, on en déduit la probabilité qu'une personne réponde au questionnaire lors du second appel est :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(R_2) &= \mathcal{P}(\overline{A_2} \cap R_2) = \mathcal{P}(\overline{A_2}) \times \mathcal{P}_{\overline{A_2}}(R_2) \\ &= 0,28 \times 0,2 = 0,056 \end{aligned}$$

Les deux événements R_1 et R_2 sont disjoints et on a l'égalité $R = R_1 \cup R_2$. On en déduit la probabilité qu'une personne réponde au questionnaire :

$$\mathcal{P}(R) = \mathcal{P}(R_1) + \mathcal{P}(R_2) = 0,12 + 0,056 = 0,176$$

3. On recherche la probabilité $\mathcal{P}_R(R_1)$. D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a l'égalité suivante :

$$\mathcal{P}_R(R_1) = \frac{\mathcal{P}(R \cap R_1)}{\mathcal{P}(R)}$$

En remarquant que $R \cap R_1 = R_1$, on a :

$$= \frac{\mathcal{P}(R_1)}{\mathcal{P}(R)} = \frac{0,12}{0,176} \approx 0,68$$

Correction 15

1. Considérons les deux événements suivants :

- S : "L'article présente un défaut de soudure" ;
- E : "L'article présente un défaut électronique" .

Un article est défectueux s'il présente au moins un de ses deux défauts. Ainsi, nous essayons de déterminer la probabilité de l'évènement $S \cup E$. La formule du calcul de la probabilité d'une réunion donne :

$$\mathcal{P}(S \cup E) = \mathcal{P}(S) + \mathcal{P}(E) - \mathcal{P}(S \cap E)$$

Les événements S et E sont indépendants :

$$\begin{aligned} &= \mathcal{P}(S) + \mathcal{P}(E) - \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(E) \\ &= 0,03 + 0,02 - 0,03 \times 0,02 \\ &= 0,05 - 0,0006 = 0,0494 \end{aligned}$$

2. a. La probabilité de tirer un article défectueux est de 0,0494. Ceci représente une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,0494.

En supposant que le tirage successif des 800 articles soit insignifiant relativement au stock de l'entreprise, nous assimilons ce tirage à un tirage avec remise et nous pouvons le modéliser par un schéma de Bernoulli de paramètre 800, 0,0494.

Notons \mathcal{X} , la variable aléatoire comptant le nombre d'articles défectueux parmi le tirage des 800 articles. Elle suit une loi binomiale de paramètres 800 et 0,0494 :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(800; 0,0494)$$

- b. L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale est donnée par :

$$E(\mathcal{X}) = n \cdot p = 800 \times 0,0494 \approx 39,52$$

Pour l'entreprise, cela signifie qu'en moyenne un lot de 800 articles comportera environ 40 pièces défectueuses.