Compléments sur les limites

I Limite d'une fonction composée

Exemple 1
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x} + 7}$
Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\lim\limits_{x \to +\infty} 7 = \ldots\ldots\ldots$
Par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} + 7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Donc comme limite de fonction composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x} + 7} = \ldots\ldots\ldots$

II Limites et comparaisons

1) Théorèmes de comparaison

Théorème 1
Soient f et g deux fonctions définies sur $]a; +\infty[$ telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x)$.
1) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2) Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

3) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

4) Si $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Remarque
Par abus de langage, on pourrait dire que "plus grand que $+\infty$ c'est forcément $+\infty$" et que "plus petit que $-\infty$ c'est forcément $-\infty$

2) Théorème d'encadrement

Théorème 2
Théorème des gendarmes
Soient f, g et h trois fonctions définies sur $]a; +\infty[$ avec a réel, telles que pour tout $x > a$
on a : $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f = l$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g = l$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} h = l$

Même théorème en $-\infty$

Exemple 2
Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x) + 4x$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \sin(x)}{x^2 + 3}$

.

III Fonction exponentielle

1) Limites aux bornes

Propriété 1

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration
EXIGIBLE

Exemple 3
Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to +\infty} e^{4-2x} + 2x$

2) $\lim_{x \to -\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$

2) Croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances

Propriété 2
Croissances comparées

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et pour tout entier n : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Démonstration
EXIGIBLE du 1)

.

Remarque
Par abus de langage, on pourrait dire que "à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x". (Sa croissance est plus rapide)

Exercice 1
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+e^x}{4e^x-x^2}$