Compléments sur la dérivation

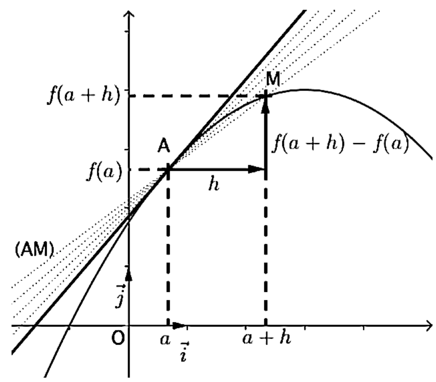
I Rappels de 1ère

Définition 1
*Le **taux de variation** de la fonction f entre a et $a+h$ (avec $h \neq 0$) est le rapport* $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Définition 2
*Dire qu'une fonction est **dérivable en a** signifie que le taux de variation entre a et $a+h$ a pour limite un nombre réel lorsque h tend vers 0*

*Ce nombre réel, lorsqu'il existe, est appelé **nombre dérivé de f en a** et est noté $f'(a)$ donc*
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Définition 3
*La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A et de pente (coefficient directeur) $f'(a)$*



Propriété 1
Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = ke^{kx}$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I,

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exercice 1
Dériver les fonctions suivantes :
1) $f(x) = (2x^3 + 3x - 5)(6x + 7)$

2) $g(x) = \dfrac{1}{x^8}$

3) $h(x) = \dfrac{3x+5}{2x^2 - 5x + 2}$

Théorème 1
Soit f une fonction définie sur I.
1) $\boldsymbol{f'(x) \geq 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{f}$ **est croissante** sur I
2) $\boldsymbol{f'(x) \leq 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{f}$ **est décroissante** sur I

Exemple 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$
Dresser le tableau de variations de la fonction f

II Dérivé d'une fonction composée

1) Définition

Définition 4
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J
Soit g une fonction définie sur un intervalle K tel que $J \in K$.
On appelle ***fonction composée*** *de f par g la fonction notée $\boldsymbol{g \circ f}$ définie sur I par : $g \circ f = g(f(x))$*

Exemple 2
On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$
Exprimer les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ en fonction de x

2) Dérivée

Définition 5
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J
Soit g une fonction définie sur un intervalle K tel que $J \in K$.
La fonction $h = g \circ f$ est dérivable sur I et on a : $h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$, ou encore $\boldsymbol{h' = g' \circ f \times f'}$

Exemple 3
Déterminer la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{x^2+5}$

3) Cas particulier d'une fonction composée

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$\mathbb{R}$	$u'e^u$

Démonstration
Les deux premières lignes du tableau :

.

Exemple 4
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 5e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad g(x) = \sqrt{2x^2+3x-7}$ $\qquad$ et $h(x) = (2x^2-5x+8)^4$

Exercice 2
On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x}{9x+1}}$ et on note Cf sa courbe représentative dans un repère.
1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à Cf
3) Etudier les variations de f
4) Vérifier graphiquement les résultats précédents à l'aide de la calculatrice