Limites de fonctions

I Limite d'une fonction à l'infini

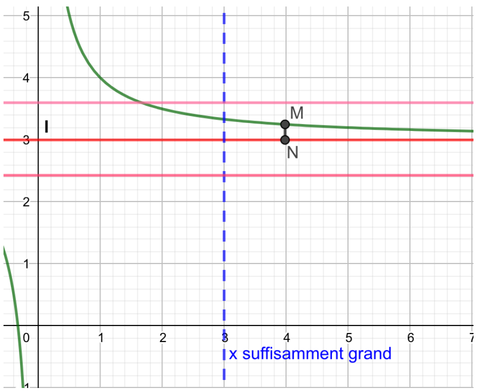
1) Limite finie à l'infini

Da façon intuitive

Dire qu'une fonction f admet une limite l en $+\infty$ c'est dire que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l, pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 3$ admet pour limite 3 lorsque x tend vers $+\infty$



Les valeurs de la fonction se rapprochent de 3 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.

Si l'on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 3, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

Définition 1

Une fonction f admet comme limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

On note $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l}$

Définition 2

- La droite d'équation $y = l$ est ***asymptote horizontale à C_f en $+\infty$*** *si* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

- La droite d'équation $y = l$ est ***asymptote horizontale à C_f en $-\infty$*** *si* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

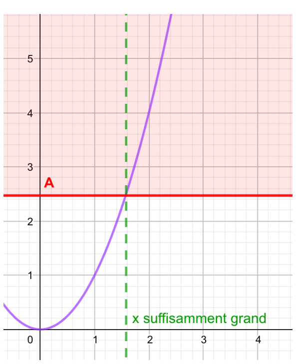
2) Limite infinie à l'infini

Da façon intuitive

Dire qu'une fonction f admet comme limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple 2

La fonction g définie par $g(x) = x^2$ admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.



En effet, les valeurs de g deviennent aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment grand. Si l'on prend un réel A quelconque, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.

Définition 3
La fonction g admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]A;+\infty[$ avec A réel contient toutes les valeurs de $g(x)$ dès que x est suffisamment grand. ***On note*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$
La fonction g admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty;B[$ avec B réel contient toutes les valeurs de $g(x)$ dès que x est suffisamment grand. On note $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

Remarque
- Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en l'infinie, c'est le cas des fonctions sinusoïdales.
- Une fonction tendant vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante

Exemple 3

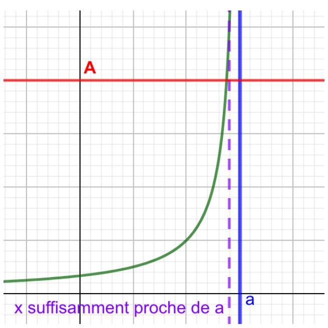
3) Limites des fonctions usuelles

Propriété 1
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ (pour n pair)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ (pour n impair)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\quad$ - $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

II Limite d'une fonction en un réel a

Da façon intuitive

Dire qu'une fonction f admet comme limite $+\infty$ en a si $f(x)$ est aussi grand l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de a.



Exemple 4
La fonction représentée à gauche admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a. En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment proche de a.
Si l'on prend un réel A quelconque, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de a

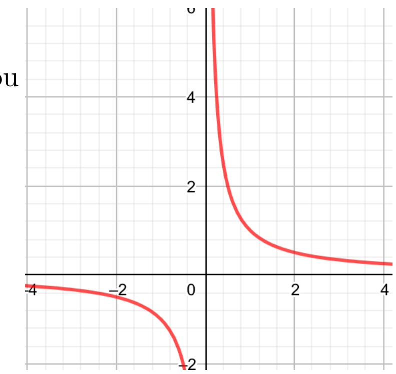
Définition 4
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle $]A;+\infty[$ avec A réel contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a et l'on note $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty}$
On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ en a si tout intervalle $]-\infty;B[$ avec B réel contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a et l'on note $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty}$

Définition 5
La droite d'équation $x = a$ est ***asymptote verticale*** *à la courbe représentative de la fonction f si* $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty}$ ***ou*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty}$

Remarque
Certaines fonctions ademettent des limites différentes en un réel a selon si $x < a$ ou si $x > a$.
Par exemple, avec la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) =$ ....
- Si $x < 0$: lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers ....et l'on note :

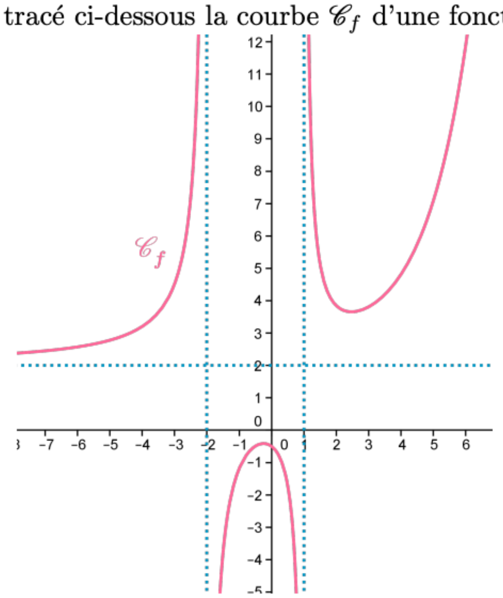
- Si $x > 0$: lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers ....et l'on note :

On parle de **limite à gauche de 0** et de **limite à droite de 0**



Exercice 1

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;1\}$.



Déterminer graphiquement les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$, en -2 et en 1 à droite et à gauche.
Indiquer les asymptotes éventuelles.

III Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Dans les cas notés $F.I$ (forme indéterminée), on ne peut pas conclure immédiatement et tout résultat est possible. Dans ce cas, il faut lever l'indétermination en changeant l'écriture.

2) Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	l	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) =$	ll'	∞	∞	F.I

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	$l\neq 0$	l	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$l'\neq 0$	0	∞	$l'\neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	∞	0	∞	F.I	F.I

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est $+\infty$ ou $-\infty$

Remarque
Comme pour les suites, on rapelle que les 4 formes indéterminées sont, par abus d'écriture :
" $\infty-\infty$ " , " $0\times\infty$ " , " $\dfrac{\infty}{\infty}$ " et " $\dfrac{0}{0}$ "

Exercice 2
Déterminer les limites suivantes:
1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 6x^3-4x^2+4x-7$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2+8}{3x-9}$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^2-14x+3}{3x^2-4}$

•

Exercice 3
Déterminer les limites suivantes:
1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$
2) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$

Exercice 4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ 2 par $f(x) = \dfrac{-3}{2-x}$
Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations