Exercices : Limites de fonctions

Exercice 1

Chacun de ses polynômes admettent au moins une racine parmi l'ensemble suivant :

$\{-2\,;-1\,;1\,;2\}$

Utiliser ce renseignement pour effectuer "*rapidement*" la factorisation de chacun des polynômes suivants :

a. x^2+2x-8 b. $2x^2-4x-6$

c. x^2+x-6 d. $3x^2-4x+1$

e. x^3+x^2-2x f. $5x^2+3x-2$

Exercice 2

Dresser le tableau de variations de chacun des polynômes du second degré suivant :

a. x^2-5x+1 b. $-3x^2+x-1$

c. $2(x+1)(2x-1)$ d. $(2-x)(4+x)$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

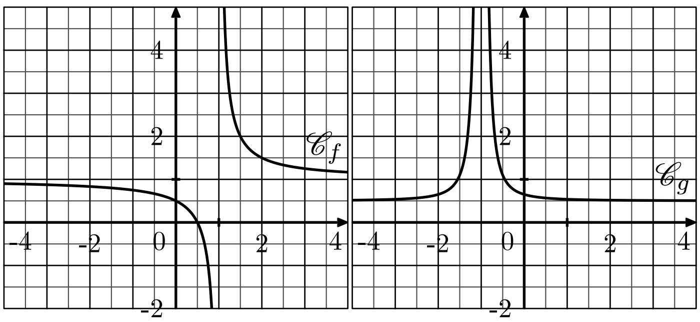
a. $3x^2+4x+1=0$ b. $3x^2-4x+2=0$

c. $-x^2+2x+3=0$ d. $2x^2-4x+2=0$

e. $-3x^2+3x+3=0$ f. $-x^2+4x+3=0$

Exercice 4

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



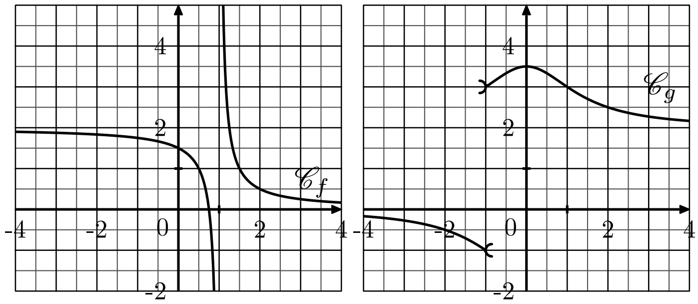
Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ f. $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} g(x)$

Exercice 5

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ f. $\lim\limits_{x\mapsto -1^-} g(x)$

Exercice 6

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{5-x}{1-x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{x^2+x+1}{x}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x-1}{-x^3}$

Exercice 7

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2\cdot x^2+3\cdot x$ b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -3\cdot x^3+\dfrac{2}{x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 5\cdot x^2-3\cdot x^3$ d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2+2\cdot x-(x+2)^2$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2+3\cdot x$ f. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3-2\cdot x^2$

Exercice 8

1. On considère la fonction f définie par :

$$f\colon x\longmapsto \frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}$$

a. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}=\frac{3+\dfrac{5}{x}}{x\cdot\left(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}$$

b. En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$.

2. On considère la fonction g définie par :

$$g\colon x\longmapsto \frac{4x^3+2x+1}{2x^3-2x^2}$$

Par un raisonnement analogue à la question précédente, établir l'égalité suivante : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=2$

Exercice 9

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{1}{x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{1}{x}$ c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{3}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^3+2\cdot x}{x^2+x}$ e. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}$

Exercice 10

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+} \frac{2-x}{2{\cdot}x^2-x-6}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3^-} \frac{x-3}{2{\cdot}x^2-15{\cdot}x+27}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-} \frac{-3{\cdot}x^2+7{\cdot}x-4}{(x-1)^2}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -2^+} \frac{3{\cdot}x^2+5{\cdot}x-2}{x^2+7{\cdot}x+10}$

Exercice 11

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\frac{x^2+3{\cdot}x}{2{\cdot}x^2-10{\cdot}x+12}$$

1. Etablir les identités suivantes :

$$f(x)=\frac{1+\dfrac{3}{x}}{2-\dfrac{10}{x}+\dfrac{12}{x^2}}=\frac{x{\cdot}(x+3)}{(x-2)(2{\cdot}x-6)}$$

2. Dresser le tableau de signes de $(x-2)(2x-6)$.

3. En déduire la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -\infty} f(x)$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} f(x)$ e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^-} f(x)$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+} f(x)$ c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3^-} f(x)$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3^+} f(x)$

Exercice 12

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -1^-} \frac{x+4}{3x^2-x-4}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-} \frac{x^2+x-3}{3{\cdot}x^2-7{\cdot}x+4}$

Exercice 13

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{5x^2+3x-1}{3x^3+2x}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{3x^4-2x}{x^3+x^2}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+} \frac{x^2-4x+4}{-2x^2+10x-12}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -1^+} \frac{1}{2x^2+x-1}$

Exercice 14

1. Etablir l'égalité algébrique suivante pour $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$

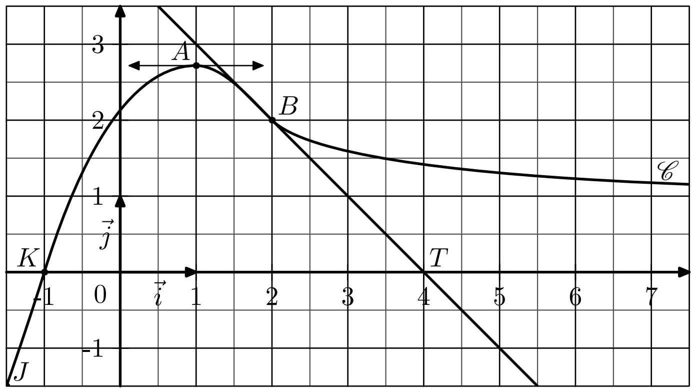
2. En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=-2$$

Exercice 15

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

- Les points $J\left(-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{3}{2}\right)$, $K(-1\,;0)$, $A\left(1\,;\dfrac{11}{4}\right)$, $B(2\,;2)$ sont des points de $\mathscr{C}$;
- La tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en B passe par $T(4\,;0)$.
- La droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
- La fonction f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;1\right]$ et strictement décroissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$.



1. Donner les valeurs de $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ ainsi que la limite de f en $+\infty$.

2. Donner, en justifiant vos résponses, les nombres $f'(1)$ et $f'(2)$

Exercice 16

On considère la fonction f définie par :

$$f:x\longmapsto\frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+5}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

   b. Quelles asymptotes admet la fonction f ?

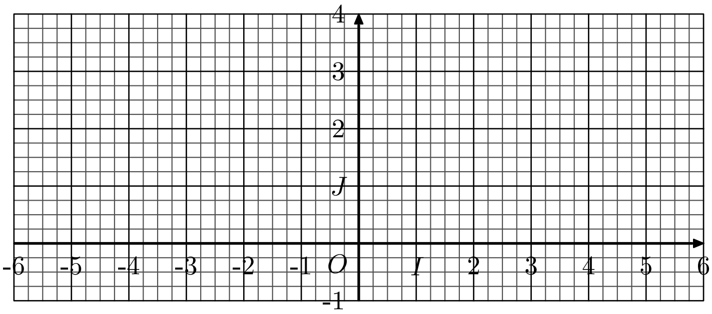
3. a. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet l'expression :

$$f'(x)=\frac{-6x^2+12x+18}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$$

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5. Tracer la droite (Δ), les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé ci-dessous :



Exercice 17

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\frac{1}{e^x-1}$$

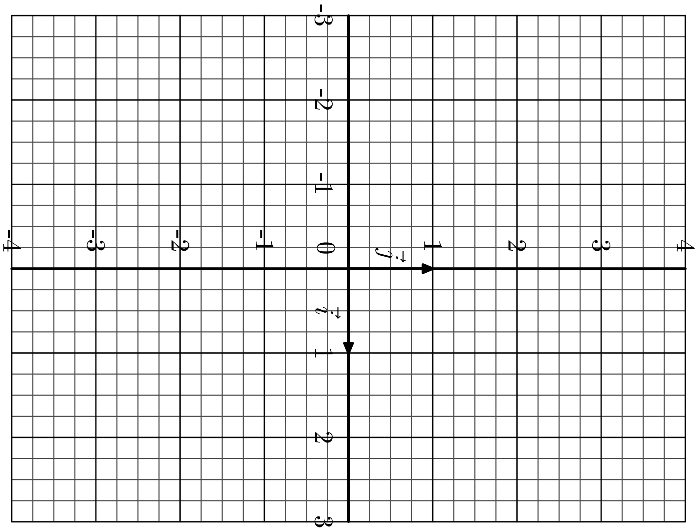
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Etablir le tableau de variations de la fonction f.

3. Préciser les différentes asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.



Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{9}{2} \cdot \mathrm{e}^{-2x} - 3 \cdot \mathrm{e}^{-3x}$

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ d'unité $1\,cm$.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
   $f(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-2x} \cdot \left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

3. Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

4. a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ intercepte l'axe des abscisses en un seul point.
   Donner la valeur approchée des coordonnées de ce point d'intersection.

5. Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous :