CORRECTIONS

Exercices : Limites de fonctions

Correction 1

a. Le polynôme x^2+2x-8 admet 2 pour racine :
$2^2+2\cdot 2-8=4+4-8=0$
Ainsi, on en déduit que ce polynôme admet une factorisation de la forme :
$x^2+2x-8=\big(x-2\big)\big(x-x_2\big)$

Montrons que sa forme factorisée est $\big(x-2\big)\big(x+4\big)$:
$\big(x-2\big)\big(x+4\big)=x^2+4x-2x-8$
$=x^2+2x-8$

b. Le polynôme $2x^2-4x-6$ admet -1 pour racine :
$2(-1)^2-4\cdot(-1)-6=2+4-6=0$
Ainsi, on en déduit que ce polynôme admet une factorisation de la forme :
$2x^2-4x-6=2\big(x+1\big)\big(x-x_2\big)$

Montrons que sa forme factorisée est $2\big(x+1\big)\big(x-3\big)$:
$2\big(x+1\big)\big(x-3\big)\big(x+1\big)\big(2x-6\big)$
$=2x^2-6x+2x-6=2x^2-4x-6$

c. Le polynôme x^2+x-6 admet 2 pour racine :
$2^2+2-6=4+2-6=0$
Ainsi, on en déduit que ce polynôme admet une factorisation de la forme :
$x^2+x-6=\big(x-2\big)\big(x-x_2\big)$

Montrons que sa forme factorisée est $\big(x-2\big)\big(x+3\big)$:
$(x-2)(x+3)=x^2+3x-2x-6$
$=x^2+x-6$

d. Le polynôme $3x^2-4x+1$ admet 1 pour racine :
$3\cdot 1^2-4\cdot 1+1=3-4+1=0$
Ainsi, on en déduit que ce polynôme admet une factorisation de la forme :
$3x^2-4x+1=3\big(x-1\big)\big(x-x_2\big)$

Montrons que sa forme factorisée est $3\big(x-1\big)\Big(x-\dfrac{1}{3}\Big)$:
$3\big(x-1\big)\Big(x-\dfrac{1}{3}\Big)=\big(x-1\big)\big(3x-1\big)$
$=3x^2-x-3x+1=3x^2-4x+1$

e. Le polynôme x^3+x^2-2x admet la factorisation $x\big(x^2+x-2\big)$; le second facteur admet 1 pour racine :
$1^2+1-2=1+1-2=0$
Ainsi, on en déduit que ce polynôme admet une factorisation de la forme :
$x^3+x^2-2x=x\big(x-1\big)\big(x-x_2\big)$

Montrons que sa forme factorisée est $x\big(x-1\big)\big(x+2\big)$:
$x\big(x-1\big)\big(x+2\big)=\big(x^2-x\big)\big(x+2\big)$
$=x^3+2x^2-x^2-2x=x^3+x^2-2x$

f. Le polynôme $5x^2+3x-2$ admet -1 pour racine :
$5(-1)^2+3(-1)-2=5-3-2=0$
Ainsi, on en déduit que ce polynôme admet une factorisation de la forme :
$5x^2+3x-2=5\big(x+1\big)\big(x-x_2\big)$

Montrons que sa forme factorisée est $5\big(x+1\big)\Big(x-\dfrac{2}{5}\Big)$:
$5\big(x+1\big)\Big(x-\dfrac{2}{5}\Big)=5\big(x+1\big)\big(x-\dfrac{2}{5}\big)$
$=\big(x+1\big)\big(5x-2\big)=5x^2-2x+5x-2$
$=5x^2+3x-2$

Correction 2

a. Le polynôme x^2-5x+1 a son coefficient du second degré qui est positif ; on en déduit qu'il admet un minimum en :
$-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-5}{2}=\dfrac{5}{2}$
qui a pour image :
$\Big(\dfrac{5}{2}\Big)^2-5\times\dfrac{5}{2}+1=\dfrac{25}{4}-\dfrac{25}{2}+1$
$=\dfrac{25-50+4}{4}=-\dfrac{21}{4}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Variation de x^2-5x+1	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{21}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

b. Le polynôme $-3x^2+x-1$ a son coefficient du second degré qui est négatig ; on en déduit qu'il admet un maximum en :
$-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2\times(-3)}=\dfrac{1}{6}$
qui a pour image :
$-3\times\Big(\dfrac{1}{6}\Big)^2+\Big(\dfrac{1}{6}\Big)-1=-\dfrac{3}{36}+\dfrac{1}{6}-1=-\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{6}-1$
$=\dfrac{-1+2-12}{12}=-\dfrac{11}{12}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
Variation de $-3x^2+x-1$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{11}{12}$	$\searrow$	$-\infty$

c. Le polynôme $2\big(x+1\big)\big(2x-1\big)$ admet pour forme développée le polynôme :
$\big(2x+2\big)\big(2x-1\big)=4x^2-2x+4x-2=4x^2+2x-2$
Son coefficient du second degré qui est positif ; on en déduit qu'il admet un minimum en :
$-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2\times 4}=-\dfrac{1}{4}$
qui a pour image :
$2\Big(-\dfrac{1}{4}+1\Big)\Big[2\cdot\Big(-\dfrac{1}{4}\Big)-1\Big]=2\times\dfrac{3}{4}\cdot\Big(-\dfrac{2}{4}-1\Big)$
$=\dfrac{3}{2}\times\Big(-\dfrac{3}{2}\Big)=-\dfrac{9}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
Variation de $2\big(x+1\big)\big(2x-1\big)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

d. Le polynôme $\big(2-x\big)\big(4+x\big)$ admet pour forme développée le polynôme :
$\big(2-x\big)\big(4+x\big)=8+2x-4x-x^2=-x^2-2x+8$
Son coefficient du second degré qui est négatif ; on en déduit qu'il admet un maximum en :

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$$
qui a pour image :
$$\big[(2-(-1)\big]\big[4+(-1)\big]=3\times3=9$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variation de $(2-x)(4+x)$	$-\infty$ $\nearrow$	9	$\searrow$ $-\infty$

Correction 3

a. L'expression $3x^2+4x+1$ admet pour discriminant :
$$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times3\times1=16-12=4$$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-2}{2\times3}=\frac{-6}{6}=-1$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+2}{2\times3}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :
$$\mathcal{S}=\left\{-1\,;-\frac{1}{3}\right\}$$

b. L'expression $3x^2-4x+2$ admet pour discriminant :
$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times2=16-24=-8$$

Le discriminantétant strictement négative, cette équation n'admet pas de solution.

c. L'expression $-x^2+2x+3$ admet pour discriminant :
$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-1)\times3=4+12=16$$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{16}=4$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-4}{2\times(-1)}=\frac{-6}{-2}=3$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+4}{2\times(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :
$$\mathcal{S}=\big\{-1\,;3\big\}$$

d. L'expression $2x^2-4x+2$ admet pour discriminant :
$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times2=16-16=0$$

Ainsi, l'équation admet une unique solution :
$$-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times2}=1$$

e. L'expression $-3x^2+3x+3$ admet pour discriminant :
$$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times(-3)\times3=9+36=45$$
On a la simplification suivante :
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-3\sqrt{5}}{2\times(-3)}=\frac{-3-3\sqrt{5}}{-6}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2\times(-3)}=\frac{-1+\sqrt{5}}{-2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :
$$\mathcal{S}=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

f. L'expression $-x^2+4x+3$ admet pour discriminant :
$$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-1)\times3=16+12=28$$
On a la simplification suivante :
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{28}=\sqrt{4\times7}=2\sqrt{7}$$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-2\sqrt{7}}{2\times(-1)}=\frac{-4-2\sqrt{7}}{-2}=2+\sqrt{7}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+2\sqrt{7}}{2\times(-1)}=\frac{-4+2\sqrt{7}}{-2}=2-\sqrt{7}$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :
$$\mathcal{S}=\left\{2-\sqrt{7}\ ;\ 2+\sqrt{(}7\right\}$$

Correction 4

a. $\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=1$

b. $\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=1$

c. $\lim_{x\mapsto1^+}f(x)=+\infty$

d. $\lim_{x\mapsto-\infty}g(x)=\frac{1}{2}$

e. $\lim_{x\mapsto+\infty}g(x)=\frac{1}{2}$

f. $\lim_{x\mapsto-1^+}g(x)=+\infty$

Correction 5

a. $\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=2$

b. $\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=0$

c. $\lim_{x\mapsto1^-}f(x)=-\infty$

d. $\lim_{x\mapsto-\infty}g(x)=0$

e. $\lim_{x\mapsto+\infty}g(x)=2$

f. $\lim_{x\mapsto-1^-}g(x)=-1$

Correction 6

a. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto1^+}x^2-3x+5=3\quad;\quad\lim_{x\mapsto1^+}x-1=0^+$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{x\mapsto1^+}\frac{x^2-3x+5}{x-1}=+\infty$$

b. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto1^+}5-x=4\quad;\quad\lim_{x\mapsto1^+}1-x=0^-$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{x\mapsto1^+}\frac{5-x}{1-x}=-\infty$$

c. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto0^-}x^2+x+1=1\quad;\quad\lim_{x\mapsto0^-}x=0^-$$
On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{x^2+x+1}{x} = -\infty$$

d. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} x-1 = -1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} -x^3 = 0^-$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x-1}{-x^3} = +\infty$$

Correction 7

a. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} 2\cdot x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} 3\cdot x = +\infty$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} 2\cdot x^2 + 3\cdot x = +\infty$$

b. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} -3\cdot x^3 = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{2}{x} = 0$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} -3\cdot x^2 + \frac{2}{x} = -\infty$$

c. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} 5\cdot x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} -3\cdot x^3 = +\infty$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} 5\cdot x^2 - 3\cdot x^3 = +\infty$$

d. On a les transformations algébriques suivantes :
$$x^2+2\cdot x-(x+2)^2 = x^2+2\cdot x-\big(x^2+4\cdot x+4\big)$$
$$= x^2+2\cdot x-x^2-4\cdot x-4 = -2\cdot x-4$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} -2\cdot x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} -4 = -4$$
On a en déduit la valeur de la limite :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} x^2+2\cdot x-(x+2)^2 = \lim_{x\mapsto+\infty} -2\cdot x-4 = -\infty$$

e. On a la factorisation suivante :
$$x^2+3\cdot x = x\cdot(x+3)$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} x+3 = -\infty$$
On a en déduit la valeur de la limite :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} x^2+3\cdot x = \lim_{x\mapsto+\infty} x\cdot(x+3) = +\infty$$

f. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} x^3 = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} -2\cdot x^2 = -\infty$$
On a en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} x^3 - 2\cdot x^2 = -\infty$$

Correction 8

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1} = \frac{x^2\cdot\left(3+\dfrac{5}{x}\right)}{x^3\cdot\left(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)} = \frac{3+\dfrac{5}{x}}{x\cdot\left(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}$$

b. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} 3+\frac{5}{x} = 3 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} x\cdot\left(3+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{3+\dfrac{5}{x}}{x\cdot\left(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)} = 0$$

2. Pour $x\neq 0$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{4x^3+2x+1}{2x^3-2x^2} = \frac{x^3\cdot\left(4+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(2-\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{4+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{2}{x}}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} 4+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3} = 4 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} 2-\frac{2}{x} = 2$$
On a en déduit la limite de la fonction g en $+\infty$:
$$\lim_{x\mapsto+\infty} g(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{4+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{2}{x}} = \frac{4}{2} = 2$$

Correction 9

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

c. On a les deux limites : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} x^2 = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^-} 3 = 3$

On en déduit la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{3}{x^2} = +\infty$

d. Par l'ensemble de définition de cette expression, on a $x\neq 0$. Ainsi, on a la simplification :
$$\frac{x^3+2\cdot x}{x^2+x} = \frac{x\cdot\big(x^2+2\big)}{x\cdot(x+1)} = \frac{x^2+2}{x+1}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} x^2+2 = 2 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} x+1 = 1$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x^3+2\cdot x}{x^2+x} = \lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x^2+2}{x+1} = \frac{2}{1} = 2$$

e. Par l'ensemble de définition de cette expression, on a $x\neq 0$. Ainsi, on a la simplification :
$$\frac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3} = \frac{-2\cdot x^2}{x^3\cdot(x+1)} = \frac{-2}{x\cdot(x+1)}$$
On a les limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} -2 = -2 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} x = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} x+1 = 1$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} x\cdot(x+1) = 0^+$$
On a alors : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3} = \lim_{x\mapsto 0^+} \frac{-2}{x\cdot(x+1)} = -\infty$

f. On utilisera la transformation algébriques issue de la question précédente.

On a les limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^-} -2 = -2 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^-} x = 0^- \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^-} x+1 = 1$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 0^-} x\cdot(x+1) = 0^-$$
On a alors : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3} = \lim_{x\mapsto 0^-} \frac{-2}{x\cdot(x+1)} = +\infty$

Correction 10

a. Le dénominateur du quotient étudié est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-1)^2-4\times 2\times(-6) = 1+48 = 49$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-1)-7}{2\times2} = \frac{1-7}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-1)+7}{2\times2} = \frac{1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Ce polynôme admet la forme factorisée suivante :

$$2{\cdot}x^2 - x - 6 = 2{\cdot}\Big(x+\frac{3}{2}\Big){\cdot}(x-2)$$
$$= (2x+3)(x-2)$$

On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{2-x}{2{\cdot}x^2-x-6} = \frac{2-x}{(2x+3)(x-2)} = \frac{-(x-2)}{(2x+3)(x-2)}$$
$$= \frac{-1}{2x+3}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto 2^+} -1 = -1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 2^+} 2x+3 = 7$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto 2^+} \frac{2-x}{2{\cdot}x^2-x-6} = \lim_{x\mapsto 2^+} \frac{-1}{2x+3} = \frac{-1}{7} = -\frac{1}{7}$$

b. On remarque que le dénominateur du quotient étudié s'annule en 3 :

$$2\times3^2 - 15\times3 + 27 = 2\times9 - 45 + 27 = 18 - 45 + 27$$
$$= 45 - 45 = 0$$

Pour établir la factorisation :

$$2{\cdot}x^2 - 15{\cdot}x + 27 = (x-3)(2x-9)$$

Il suffit de développer l'expression :

$$(x-3)(2x-9) = 2x^2 - 9x - 6x + 27$$
$$= 2x^2 - 15x + 27$$

On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\frac{x-3}{2{\cdot}x^2-15{\cdot}x+27} = \frac{x-3}{(x-3)(2x-9)} = \frac{1}{2x-9}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto 3^-} 1 = 1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 3^-} 2x-9 = -3$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto 3^-} \frac{x-3}{2{\cdot}x^2-15{\cdot}x+27} = \lim_{x\mapsto 3^-} \frac{1}{2x-9} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

c. Le numérateur du quotient étudié est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 7^2 - 4\times(-3)\times(-4) = 49 - 48 = 1$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-7-1}{2\times(-3)} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-7+1}{2\times(-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Le numérateur admet la factorisation suivante :

$$-3{\cdot}x^2 + 7{\cdot}x - 4 = -3{\cdot}\Big(x-\frac{4}{3}\Big){\cdot}(x-1)$$
$$= (4-3x)(x-1)$$

On a la transformation algébrique suivante :

$$\frac{-3{\cdot}x^2+7{\cdot}x-4}{(x-1)^2} = \frac{(4-3x)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{4-3x}{x-1}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto 1^-} 4-3x = 1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 1^-} x-1 = 0^-$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto 1^-} \frac{-3{\cdot}x^2+7{\cdot}x-4}{(x-1)^2} = \lim_{x\mapsto 1^-} \frac{4-3x}{x-1} = -\infty$$

d. Les deux polynômes définissant le numérateur et le quotient du numérateur s'annule en -2 : $(x{+}2)$ est un facteur commun à ces deux polynômes.

Etablissons les deux factorisations suivantes :

- $3{\cdot}x^2 + 5{\cdot}x - 2 = (x+2)(3x-1)$
  On a le développement :
  $(x+2)(3x-1) = 3x^2 - x + 6x - 2 = 3x^2 + 5x - 2$
- $x^2 + 7{\cdot}x + 10 = (x+2)(x+5)$
  On a le développement suivant :
  $(x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$

On a la simplification du quotient :

$$\frac{3{\cdot}x^2+5{\cdot}x-2}{x^2+7{\cdot}x+10} = \frac{(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x+5)} = \frac{3x-1}{x+5}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto -2^+} 3x-1 = -7 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto -2^+} x+5 = 3$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto -2^+} \frac{3{\cdot}x^2+5{\cdot}x-2}{x^2+7{\cdot}x+10} = \lim_{x\mapsto -2^+} \frac{3x-1}{x+5} = \frac{-7}{3} = -\frac{7}{3}$$

Correction 11

1. On a les transformations algébriques suivantes :

- $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2x^2-10x+12}$

Pour $x \neq 0$, on a :

$$= \frac{x^2{\cdot}\Big(1+\frac{3}{x}\Big)}{x^2{\cdot}\Big(2-\frac{10x}{x^2}+\frac{12}{x^2}\Big)} = \frac{x^2{\cdot}\Big(1+\frac{3}{x}\Big)}{x^2{\cdot}\Big(2-\frac{10}{x}+\frac{12}{x^2}\Big)} = \frac{1+\frac{3}{x}}{2-\frac{10}{x}+\frac{12}{x^2}}$$

- Etudions le polynôme $2x^2{-}10x{+}12$. Ce polynôme du second degré admet pour discriminant :

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4\times2\times12 = 100 - 96 = 4$$

  On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2.$

  Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, on en déduit l'existence des deux racines suivantes :

  $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10)-2}{2\times2} = \frac{10-2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

  $$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10)+2}{2\times2} = \frac{10+2}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

  Ainsi, ce polynôme admet pour forme factorisée :

  $$2x^2 - 10x + 12 = 2{\cdot}(x-2)(x-3) = (x-2)(2x-6)$$

  On obtient la forme factorisée de l'expression $f(x)$:

  $$f(x) = \frac{x^2+3x}{2x^2-10x+12} = \frac{x(x+3)}{(x-2)(2x-6)}$$

2. Son coefficient du terme du second degré étant strictement positif, ce polynôme admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$2x^2-10x+12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. a. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} 1+\frac{3}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} 2-\frac{10}{x}+\frac{12}{x^2}=2$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\frac{1+\dfrac{3}{x}}{2-\dfrac{10}{x}+\dfrac{12}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

b. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} 1+\frac{3}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} 2-\frac{10}{x}+\frac{12}{x^2}=2$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\frac{1+\dfrac{3}{x}}{2-\dfrac{10}{x}+\dfrac{12}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

c. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto2^-} x(x+3)=10 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto2^-} (x-2)(2x-6)=0^+$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto2^-} f(x)=\lim_{x\mapsto2^-}\frac{x(x+3)}{(x-2)(2x-6)}=+\infty$$

d. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto2^+} x(x+3)=10 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto2^+} (x-2)(2x-6)=0^-$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto2^+} f(x)=\lim_{x\mapsto2^+}\frac{x(x+3)}{(x-2)(2x-6)}=-\infty$$

e. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto3^-} x(x+3)=18 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto3^-} (x-2)(2x-6)=0^-$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto3^-} f(x)=\lim_{x\mapsto3^-}\frac{x(x+3)}{(x-2)(2x-6)}=-\infty$$

f. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto3^+} x(x+3)=18 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto3^+} (x-2)(2x-6)=0^+$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto3^+} f(x)=\lim_{x\mapsto3^+}\frac{x(x+3)}{(x-2)(2x-6)}=+\infty$$

Correction 12

a. Considérons le polynôme formant le dénominateur du quotient étudié. Il possède pour discriminant :
$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-1)^2-4\times3\times(-4)=1+48=49$$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)-7}{2\cdot3}=\frac{1-7}{6}=\frac{-6}{6}=-1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)+7}{2\cdot3}=\frac{1+7}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Le coefficient du second degré de ce polynôme étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x^2-x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a les limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-1^-} x+4=3 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-1^-} 3x^2-x-4=0^+$$
On en déduit la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^-}\frac{x+4}{3x^2-x-4}=+\infty$

b. Vérifions que le dénominateur du quotient étudié s'annule en 1 :
$$3\times1^2-7\times1+4=3-7+4=0$$
Vérifions la factorisation : $3\cdot x^2-7\cdot x+4=(3x-4)(x-1)$
On a le développement :
$$(3x-4)(x-1)=3x^2-3x-4x+4=3x^2-7x+4$$
Le coefficient du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3\cdot x^2-7\cdot x+4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto1^-} x^2+x-3=-1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto1^-} 3\cdot x^2-7\cdot x+4=0^+$$
On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-}\frac{x^2+x-3}{3\cdot x^2-7\cdot x+4}=-\infty$

Correction 13

a. Pour $x\neq0$, on a les manipulations algébriques suivantes :
$$\frac{5x^2+3x-1}{3x^3+2x}=\frac{x^2\cdot\left(5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^3\cdot\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right)}=\frac{5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{x\cdot\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right)}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} 5+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}=5 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} x\cdot\left(3+\frac{2}{x^2}\right)=+\infty$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{5x^2+3x-1}{3x^3+2x}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{x\cdot\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right)}=0$$

b. Pour $x\neq0$, on a les manipulations suivantes :
$$\frac{3x^4-2x}{x^3+x^2}=\frac{x\cdot\left(3x^3-2\right)}{x^2\cdot\left(x+1\right)}=\frac{3x^3-2}{x\cdot\left(x+1\right)}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-} 3x^3-2=-2 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto0^-} x\cdot\left(x+1\right)=0^-$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto0^-}\frac{3x^4-2x}{x^3+x^2}=\lim_{x\mapsto0^-}\frac{3x^3-2}{x\cdot\left(x+1\right)}=+\infty$$

c. En remarquant que le numérateur et le dénominateur s'annule, on en déduit que 2 est une racine commune au numérateur et au dénominateur.

Vérifions la factorisation suivante :
$$\frac{x^2-4x+4}{-2x^2+10x-12}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)(6-2x)}$$

- $(x-2)^2=x^2-4x+4$
- $(x-2)(6-2x)=6x-2x^2-12+4x=-2x^2+10x-12$

Ces deux développements permettent d'établir la factorisation annoncée.

Ainsi, on en déduit la simplification suivante :

$$\frac{x^2-4x+4}{-2x^2+10x-12}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)(6-2x)}=\frac{x-2}{6-2x}$$

On a les deux limites suivantes :

$\lim_{x\mapsto 2^+} x-2=0^+ \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 2^+} 6-2x=2$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto 2^+}\frac{x^2-4x+4}{-2x^2+10x-12}=\lim_{x\mapsto 2^+}\frac{x-2}{6-2x}=0$$

d. Pour connaître le signe du dénominateur, nous devons connaître les deux racines du polynôme du dénominateur ; le discriminant de ce polynôme a pour valeur :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=1^2-4{\cdot}2{\cdot}(-1)=1+8=9$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-1-3}{2{\cdot}2}=\frac{-4}{4}=-1 \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-1+3}{2{\cdot}2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, ce polynôme admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2+x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, on en déduit la limite suivante :

$\lim_{x\mapsto -1^+} 2x^2+x-1=0^-$

On a ainsi le résultat :

$$\lim_{x\mapsto -1^+}\frac{1}{2x^2+x-1}=-\infty$$

Correction 14

1. Le facteur $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}$ étant non-nul, à l'aide de l'expression conjuguée du dénominateur, on a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=\frac{x{\cdot}\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\big)}{\big(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}\big)\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\big)}$$

$$=\frac{x{\cdot}\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\big)}{\big(\sqrt{x^2+1}\big)^2-\big(\sqrt{x+1}\big)^2}=\frac{x{\cdot}\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\big)}{(x^2+1)-(x+1)}$$

$$=\frac{x{\cdot}\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\big)}{x^2+1-x-1}=\frac{x{\cdot}\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\big)}{x{\cdot}(x-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$

2. On a les deux limites suivantes :

$\lim_{x\mapsto 0^+}\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}=2 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} x-1=-1$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$=\frac{2}{-1}=-2$$

Correction 15

1. - Le point $J\Big(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\Big)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ; on en déduit :

   $f\Big(-\frac{3}{2}\Big)=-\frac{3}{2}$
   - $K(-1;0)\in\mathscr{C}$. on a : $f(-1)=0$
   - $A\Big(1;\frac{11}{4}\Big)\in\mathscr{C}$. on a : $f(1)=\frac{11}{4}$
   - $B(2;2)\in\mathscr{C}$. on a : $f(2)=2$

   Dans l'énoncé, on précise que la droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$; on en déduit la valeur suivante de la limite :

   $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=1$

2. - Au point A, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses ; ainsi, le coefficient directeur de cette tangente a pour valeur 0.

     Le point A a pour abscisse 1 ; on en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 1 :

     $f'(1)=0$.
   - La droite (BT) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2. Le coefficient directeur de la droite (BT) est obtenue par le quotient :

     $\frac{y_T-y_B}{x_T-x_B}=\frac{0-2}{4-2}=-1$

     On en déduit la valeur de $f'(2)$:

     $f'(2)=-1$.

Correction 16

1. Le dénominateur du quotient définissant l'image $f(x)$ d'un nombre x par la fonction f est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

   $\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-2)^2-4{\times}1{\times}5=4-20=-16$

   Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucun racine.

   Le dénominateur de ce quotient ne s'annulant jamais, on a : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

2. a. Pour $x\neq 0$, on a les transformations algébriques suivantes :

$$f(x)=\frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+5}=\frac{x^2{\cdot}\Big(1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\Big)}{x^2{\cdot}\Big(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\Big)}=\frac{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$:

On a les deux limites :

$\lim_{x\mapsto+\infty} 1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}=1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} 1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}=1$

On en déduit la valeur de la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{1}{1}=1$$

On en déduit la limite de la fonction f en $-\infty$:

$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=1$

b. La fonction f admet une seule asymptote : la droite $y=1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. a. L'expression de la fonction f est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :

$u(x)=x^2+4x-1 \quad ; \quad v(x)=x^2-2x+5$

qui admettent pour dérivées les fonctions :

$u'(x)=2x+4 \quad ; \quad v'(x)=2x-2$

Ainsi, la dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$=\frac{(2x+4)\cdot(x^2-2x+5)-(x^2+4x-1)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2}$$
$$=\frac{(2x^3-4x^2+10x+4x^2-8x+20)-(2x^3-2x^2+8x^2-8x-2x+2)}{(x^2-2x+5)^2}$$
$$=\frac{(2x^3+2x+20)-(2x^3+6x^2-10x+2)}{(x^2-2x+5)^2}$$
$$=\frac{2x^3+2x+20-2x^3-6x^2+10x-2}{(x^2-2x+5)^2}$$
$$=\frac{-6x^2+12x+18}{(x^2-2x+5)^2}$$

b. Pour dresser le tableau de signes de $f'(x)$, il suffit d'étudier le signe du numérateur du quotient définissant son expression car le dénominateur est strictement positif.

Le polynôme définissant son numérateur a pour discriminant :

$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=12^2-4\times(-6)\times18$

$144+432=576$

On a la simplification suivante : $\sqrt{576}=24$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-12-24}{2\times(-6)}=\frac{-36}{-12}=3$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-12+24}{2\times(-6)}=\frac{12}{-12}=-1$$

Ainsi, on obtient le tableau de signes de la fonction dérivée f' :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-∞		-1		3		$+\infty$
Variation de f	1	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{5}{2}$	↘	1

4. On a les deux valeurs :

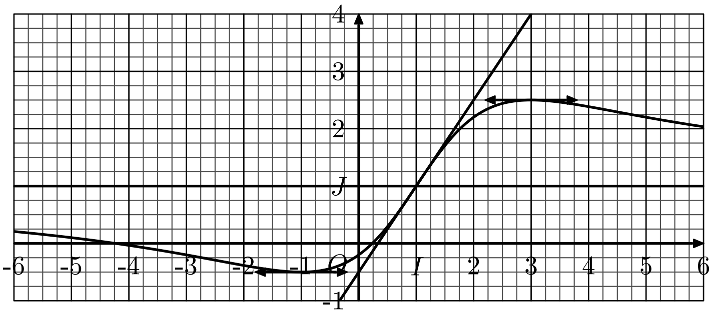
- $f(1)=\dfrac{1^2+4\times1-1}{1^2-2\times1+5}=\dfrac{1+4-1}{1-2+5}=\dfrac{4}{4}=1$
- $f'(1)=\dfrac{-6\times1+12\times1+18}{(1^2-2\times1+5)^2}=\dfrac{-6+12+18}{(1-2+5)^2}$

$$=\frac{24}{4^2}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$$

L'équation (Δ) a pour équation réduite :

$$y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)$$
$$y=\frac{3}{2}\cdot(x-1)+1$$
$$y=\frac{3}{2}\cdot(x-1)+1$$
$$y=\frac{3}{2}\cdot x-\frac{3}{2}+1$$
$$y=\frac{3}{2}\cdot x-\frac{1}{2}$$

5. Voici la représentation de la droite (Δ), de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote :



Correction 17

1. Pour que ce quotient soit définit, il faut que son dénominateur soit non-nul ; cherchons les valeurs annulant le dénominateur :

$$e^x-1=0 \implies e^x=1 \implies x=0$$

L'ensemble de définition est :

$\mathcal{D}=\mathbb{R}\backslash\{0\}=\mathbb{R}^*$

2. La fonction f est écrit sous la forme $\dfrac{1}{u}$ où :

$u(x)=e^x-1$; $u'(x)=e^x$

La formule de dérivation de l'inverse d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=-\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et le dénominateur de la fonction est strictement positif ; on en déduit que la fonction f' est strictement négative sur $\mathcal{D}$: la fonction f est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

On a les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{1}{e^x-1}=-1$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{e^x-1}=0$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-}f(x)=\lim_{x\mapsto0^-}\frac{1}{e^x-1}=-\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+}f(x)=\lim_{x\mapsto0^+}\frac{1}{e^x-1}=+\infty$

On a le tableau de variations suivant :

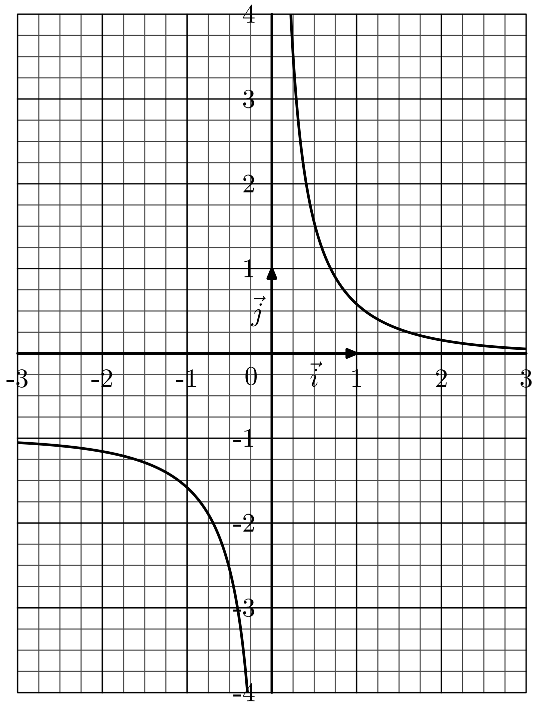
x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation de f	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

3. La courbe $\mathscr{C}$ possède de trois asymptotes :

- Une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=0$.
- Une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y=-1$.

- Une asymptote verticale d'équation $x=0$.

4. Voici le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$.



Correction 18

1. On a la transformation algébrique suivante :
$$f(x) = \frac{9}{2}\cdot e^{-2x} - 3\cdot e^{-3x} = \frac{3}{2}\cdot 3\cdot e^{-2x} - e^{-x}\cdot 3\cdot e^{-2x}$$
$$= 3\cdot e^{-2x}\cdot\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)$$

2. - On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} 3\cdot e^{-2x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{3}{2} - e^{-x} = \frac{3}{2}$$
On en déduit la limite suivante de la fonction f :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$$
- On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} 3\cdot e^{-2x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{3}{2} - e^{-x} = -\infty$$
On en déduit la limite suivante de la fonction f :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = -\infty$$

3. Pour déterminer l'expression de la dérivée de la fonction f, utilisons l'expression initiale de f :
$$f(x) = \frac{9}{2}\cdot e^{-2x} - 3\cdot e^{-3x}$$
Ainsi, la fonction f' admet pour dérivée :
$$f'(x) = \frac{9}{2}\cdot\left[(-2)\cdot e^{-2x}\right] - 3\cdot\left[(-3)\cdot e^{-3x}\right]$$
$$= -9\cdot e^{-2x} + 9\cdot e^{-3x} = -9\cdot e^{-2x}\cdot\left(1 - e^{-x}\right)$$
Etudions le signe de $1-e^{-x}$:
$$1 - e^{-x} > 0$$
$$-e^{-x} > -1$$
$$e^{-x} < 1$$
$$e^{-x} < e^0$$
La fonction exponentielle est strictement croissante
$$-x < 0$$
$$x > 0$$
On obtient le tableau de signes suivant de la fonction f' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-9\cdot e^{-2x}$		$-$		$-$	
$1 - e^{-x}$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

L'image de 0 par la fonction f a pour valeur :
$$f(0) = \frac{9}{2}\cdot e^{-2\times0} - 3\cdot e^{-3\times0} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$
La fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

4. a. Les points d'intersection avec l'axe des ordonnées se limite au point d'abscisse 0. Son ordonnée a pour valeur :
$$f(0) = \frac{9}{2}\cdot e^{-2\times0} - 3\cdot e^{-3\times0} = \frac{9}{2}\cdot e^0 - 3\cdot e^0$$
$$= \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$
Le point d'intersection avec l'axe des ordonnées a pour coordonnée $\left(0\,;\frac{3}{2}\right)$

b. Un point d'intersection avec l'axe des abscisses a ses coordonnées de la forme $(x\,;0)$: son abscisse est donc un antécédent du nombre 0.

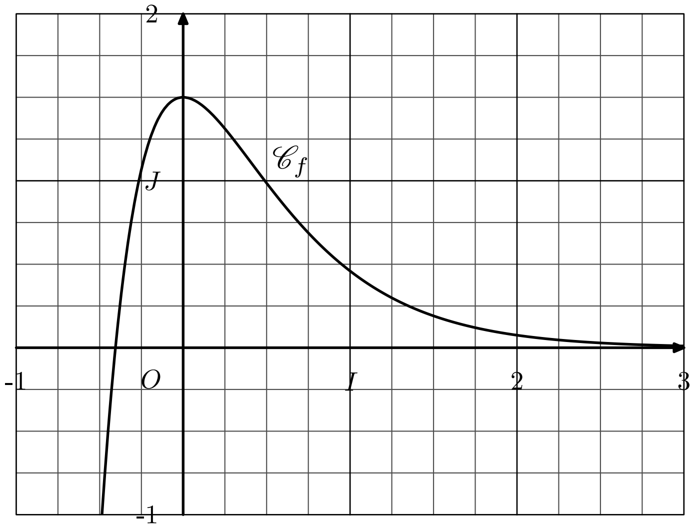
Etudions les solutions de l'équation : $f(x)=0$

- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right]$:
On a les deux limites aux bornes de $\left]-\infty\,;0\right]$:
$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad f(0) = \frac{3}{2}$$
De plus :
  - La fonction f est continue sur $\left]-\infty\,;0\right]$
  - La fonction f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;0\right]$
  - le nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de la fonction f sur cet intervalle.

  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α appartenant à $\left]-\infty\,;0\right]$ vérifiant :
$$f(\alpha) = 0$$
- Sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$:
D'après le tableau de variation, la fonction f admet pour minorant le nombre 0 en $+\infty$: le nombre 0 n'admet aucun antécédent sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par la fonction f.

Ainsi, il n'existe qu'un seul point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses. A l'aide de la calculatrice, on obtient la valeur approchée de α :
$$x \approx -0{,}4$$
Le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses a environ pour coordonnées $(-0{,}4\,;0)$

5. La valeur approchée de l'image de 1, par la fonction f, est :
$$f(1) = \frac{9}{2}\cdot e^{-2} - 3\cdot e^{-3} \approx 0{,}46$$
Voici le tracé de la fonction f :


2
$\mathscr{C}_f$
J
-1
O
I
2
3
-1