Primitives et équations différentielles

I Primitive d'une fonction continue

1) Définition d'une équation différentielle

Définition 1
*Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction*

Exemple 1
1) L'équation $f'(x) = 9$ peut se noter $y' = 9$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
Dans ce cas, une solution de cette équation est

2) Une solution de l'équation $y' = 2x$ est

Pour une équation différentielle, la solution n'est habituellement pas unique.
Par exemple, une autre solution de l'équation différentielle est

2) Equation différentielle du type $y' = f$

Définition 2
*Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est **une solution** de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si g est dérivable sur I et pour tout x de I, on a $g'(x) = f(x)$*

Exercice 1
Prouver que la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \dfrac{1}{x}$

3) Primitive d'une fonction

Définition 3
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
*On appelle **primitive** de f sur I une fonction F dérivable sur I telle que* $\boldsymbol{F' = f}$

Exemple 2
Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 2x + 3$. Donner une primitive F de la fonction f

Remarque
On obtient donc **F a pour dérivée $f \Leftrightarrow f$ a pour primitive F**

4) Primitive des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ pour $n \geq 0$ $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;\ +\infty[$ pour $n < -1$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;\ +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0\,;\ +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;\ +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$

5) Linéarité des primitives

Propriété 1
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f et G une primitive de g sur I alors :
$F + G$ est une primitive de $f + g$
kF est une primitive de kf avec k réel

6) Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I :

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n < 0, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	

Exercice 2 (Recherche de primitives)
Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur I :

a) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^3}$ sur $I =]0; +\infty[$

c) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ sur $I = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

e) $f(x) = x^2 e^{x^3}$ sur $I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = \cos(5x) - 3\sin(3x-1)$ sur $I = \mathbb{R}$

Propriété 2
Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante

Démonstration
EXIGIBLE

Propriété 3
Soit f une fonction continue sur un intervalle I
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction G définie par $G(x) = F(x) + C$ est une primitive de f sur I

Exemple 3
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$
Une primitive de f est F avec $F(x) =$
Donc toute fonction de la forme
est une primitive de f

Propriété 4
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle

Exercice 3 (Recherche d'une primitive particulière)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par
$f(x) = \dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

1) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f

2) Déterminer la primitive de f qui s'annule en $x = 1$

.

II Equations différentielles

1) Equations différentielles du type $y' = ay$

Propriété 5
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions f de la forme
$f(x) = Ce^{ax}$ où C est une constante réelle quelconque

Démonstration
EXIBIGLE

Exercice 4 (Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$)
On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$

1) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation

2) Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$

Propriété 6
Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf avec $k \in \mathbb{R}$ sont aussi des solutions de l'équation différentielle

2) Equations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété 7
La fonction $f(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$)
Cette solution est appelée **solution particulière constante**

Propriété 8
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont les fonctions de la forme $f(x) = u(x) + v(x)$
avec u la solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$
et v une solution quelconque de l'équation $y' = ay$

Propriété 9 (Corollaire)
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$
avec $C \in \mathbb{R}$

Exercice 5 (Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$)
On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$

1) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation

2) Déterminer l'unique solution telle que $y(0) = -1$

3) Equations différentielles du type $y' = ay + f$

Propriété 10
Soit a un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions g de la forme $g(x) = u(x) + v(x)$
avec u une solution particulière de l'équation $y' = ay + f$
et v une solution quelconque de l'équation $y' = ay$

Exercice 6 (Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$)
On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$

1) Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle

2) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle