Représentations paramétriques et équations cartésiennes

I Représentation paramétrique d'une droite

Propriété 1
L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit (d) une droite passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On a : $M(x; y; z) \in (d) \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (1)$$

Remarque
Ce système s'apelle **une représentation paramétrique** de la droite (d)

Exercice 1
L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Soient les points $A(2; 3; -1)$ et $B(1; -3; 2)$.
1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB)
2) Déterminer les coordonnées du point M d'intersection de la droite (AB) et avec le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$

II Equation cartésienne d'un plan

Théorème 1
L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

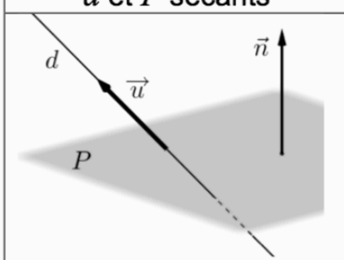
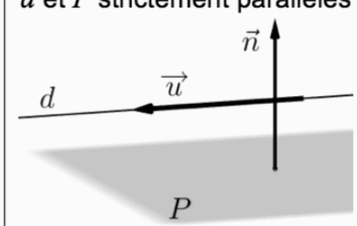
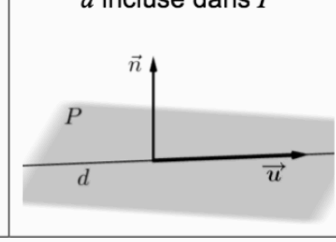
Réciproquement, si $a; b$ et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$ est un plan

Démonstration
EXIBIGLE

Exemple 1
Le plan d'équation cartésienne $x - y + 5z + 1 = 0$

Exercice 2
Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A(-1; 2; 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$

III Positions relatives d'une droite et d'un plan

	d et P sécants	d et P parallèles	
Positions relatives - Droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ - Plan P de vecteur normal $\vec{n}$		d et P strictement parallèles 	d incluse dans P 
Vecteurs	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux	
Produit scalaire	$\vec{u}.\vec{n} \neq 0$	$\vec{u}.\vec{n} = 0$	

Exercice 3 (Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan)
Dans un repère orthonormé; le plan P a pour équation $2x - y + 3z - 2 = 0$. Soient deux points $A(1; 2; -3)$ et $B(-1; 2; 0)$

1) Démontrer que (AB) et P sont sécants

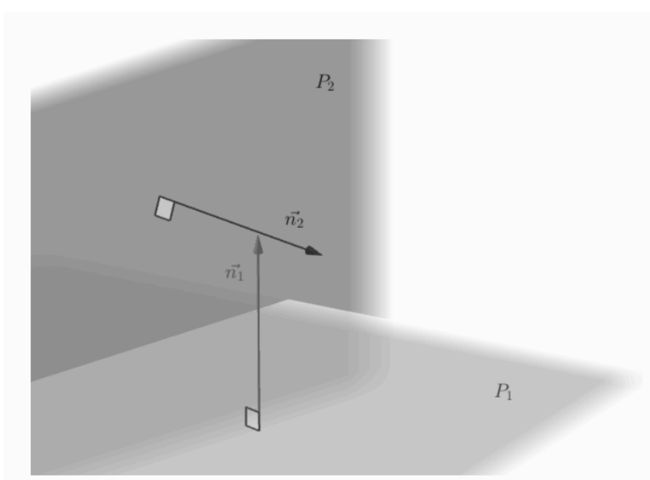
2) Déterminer leur point d'intersection

.

Exercice 4 (Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite)
Dans un repère orthonormé, on a les points $A(1;0;2)$, $B(-1;2;1)$ et $C(0;1;-2)$

Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de C sur (AB)

Propriété 2
Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre



Exercice 5 (Détmontrer que 2 plans sont perpendiculaires)
Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives :

$2x + 4y + 4z - 3 = 0$ et $2x - 5y + 4z - 1 = 0$

Démontrer sur P et P' sont perpendiculaires

Exercice 6 (Pour aller plus loin : Intersection de 2 plans)
Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives :

$2 - +2y + z - 5 = 0$ et $2x - y + 3z - 1 = 0$

1) Démontrer que P et P' sont sécants

2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite (d) d'intersection