Exercices : Equations cartésiennes et représentations paramétriques

Exercice 1

Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x+2y-z=-2 \\ 3x+y+2z=-1 \\ x-y+3z=3 \end{cases}$$
(On montrera que ce système admet un unique triplet solution).

Exercice 2

Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 3x+y-z=1 \\ x-y+2z=2 \\ -x+5y-9z=-5 \end{cases}$$
(On montrera que ce système n'admet aucune solution)

Exercice 3

Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x-y+4z=-2 \\ 5x-y+7z=1 \end{cases}$$
(On montrera que ce système admet une infinité de solution qu'on écrira sous la forme $(\ldots;\ldots;z)$ où $z\in\mathbb{R}$)

Exercice 4

Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur dans chaque cas ci-dessous :

a. $A\,(3\,;0\,;-2)$; $\vec{u}\,(-1\,;-2\,;1)$

b. $A\,(2\,;-1\,;1)$; $\vec{u}\,(2\,;0\,;-4)$

Exercice 5

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

On considère le point A de coordonnées $(-2\,;8\,;4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\,;5\,;-1)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Exercice 6

Indiquer pour la proposition suivante si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

La droite de l'espace passant par le point B de coordonnées $(2\,;3\,;4)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\,(1\,;2\,;3)$ comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t+1 \\ z=3t+1 \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

Exercice 7

On considère l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ et la droite (d) admettant la représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$$

1. a. Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}\,;4\,;-\frac{5}{2}\right)$ appartient à la droite (d).

   b. Montrer que le point $B\left(-\frac{9}{4}\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{23}{4}\right)$ n'appartient pas à la droite (d).

2. On considère la droite (d') admettant la représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=1+\frac{3}{2}\cdot t \\ y=3-3t \\ z=-4-\frac{9}{2}\cdot t \end{cases}, \text{ où } t\in\mathbb{R}$$

   a. Montrer que le point A appartient à la droite (d').

   b. Quelle est la position relative des droites (d) et (d')?

Exercice 8

On considère l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour représentations paramétriques :
$$(d):\begin{cases} x=3+2\cdot t \\ y=-1-2\cdot t \\ z=2+6\cdot t \end{cases} \quad (d'):\begin{cases} x=-1-t \\ y=-1+t \\ z=-3\cdot t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

1. Montrer que les droites (d) et (d') sont parallèles.
2. Montrer que les droites (d) et (d') sont parallèles-strictes? *(on montrera qu'un point de (d) n'appartient pas à (d'))*

Exercice 9

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. Soit A le point de coordonnée $(3\,;1\,;3)$.

On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;2\,;-1)$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

Dire laquelle des trois affirmations suivantes est exacte. Aucune justification n'est demandée :

1. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et parallèles ;
2. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et sécantes ;
3. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non coplanaires.

Exercice 10

On considère l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour représentation paramétrique :

$$(d) : \begin{cases} x = -t \\ y = -1 - t \\ z = 5 + 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \qquad (d') : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites (d) et (d') sont coplanaires et sécantes. On précisera les coordonnées du point d'intersection.

Exercice 11

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les deux droites (d) et (d') admettant pour représentations paramétriques :

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad (d') : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -6 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites (d) et (d') sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 12

On considère les deux droites de représentation paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases} \text{ où } u \in \mathbb{R}$$

Montrer que ces deux droites sont sécantes. Donner les coordonnées du point d'intersection.

Exercice 13

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé, on considère le deux droites (d) et (d') définies par leur représentation paramétrique :

$$(d) \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -4 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \qquad (d') \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 2t \\ z = -2t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que les droites (d) et (d') sont orthogonales entre elles.
2. Les droites (d) et (d') sont-elles sécantes ? Si oui, préciser le point d'intersection.

Exercice 14

On considère l'espace muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\,;K\right)$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour équation paramétrique :

$$(d) \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 + t \\ z = 4 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \quad ; \quad (d') \begin{cases} x = 2 + 2 \cdot t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que les droites (d) et (d') sont non-coplanaires.
2. On suppose l'existence d'une droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) et perpendiculaire à la droite (d')

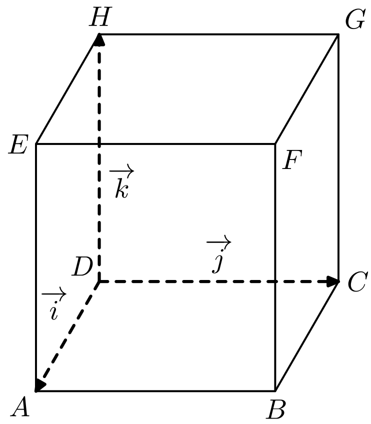
   a. Justifier l'existence d'un réel t tel que la droite (Δ) admette pour représentation paramétrique :

   $$\begin{cases} x = 3 + t + t' \\ y = -5 + t - t' \\ z = 4 + t' \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}$$

   b. En déduire une équation paramétrique de la droite (Δ).

Exercice 15

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



On munit l'espace du repère $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\right)$.

1. Nommer les plans admettant les équations cartésiennes suivantes :

   a. $z = 0$ b. $y = 1$

   c. $x + y = 1$ d. $x + y + z = 2$

   e. $x + y + z = 1$ f. $x - y = 0$

2. Déterminer l'équation cartésienne de chacun des plans suivants :

   a. (EHD) b. (FGH) c. (HDC)

3. a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{BG}$ est orthogonal au plan (EFC).

   b. En déduire une équation du plan (EFC).

Exercice 16

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère le plan $(\mathcal{P})$ passant par le point $A\left(1\,;2\,;-1\right)$ et admettant le vecteur $\vec{n}\left(1\,;-1\,;3\right)$ pour vecteur normal.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. Les points $B\left(2\,;8\,;1\right)$ et $C\left(-2\,;5\,;1\right)$ appartiennent-ils au plan $\mathcal{P}$?

Exercice 17

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé, on considère le plan $(\mathcal{P})$ passant par le point A et admettant $\vec{n}$ pour vecteur normal où :

$$A\left(3\,;1\,;2\right) \quad ; \quad \vec{n}\left(2\,;1\,;-1\right)$$

On considère les points M et N deux points de l'espace où :

$$M\left(4\,;-2\,;1\right) \quad ; \quad N\left(-2\,;8\,;2\right)$$

Les points M et N appartiennent-ils au plan $(\mathcal{P})$?

Exercice 18

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

On considère le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne suivante :
$(\mathcal{P})$: $5{\cdot}x-2{\cdot}y+z-5=0$

1. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $(\mathcal{P})$.

2. Déterminer l'équation du plan $(\mathcal{Q})$ parallèle au plan $(\mathcal{P})$ et passant par le point $A\big(5\,;-1\,;2\big)$

Exercice 19

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

On considère les point $A\big(2\,;-3\,;-1\big)$ et $B\big(-1\,;1\,;0\big)$.

Déterminer l'équation du plan médiateur du segment $[AB]$.

Exercice 20

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

On considère :

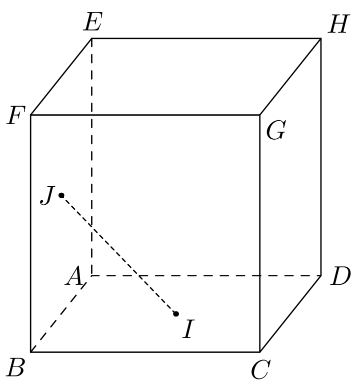
- $(\mathcal{P})$ est le plan passant par $A\big(3\,;1\,;2\big)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\big(1\,;-4\,;1\big)$;
- (d) est la droite passant par $B\big(1\,;4\,;2\big)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\big(1\,;1\,;3\big)$.

1. Démontrer que le plan $(\mathcal{P})$ a pour équation cartésienne :
$x-4y+z-1=0$

2. Montrer que la droite (d) est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 21

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$. Les points I et J représentent respectivement les centres des faces $ABCD$ et $ABFE$.



On munit l'espace du repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Donner les coordonnées des points I et J.

 b. Donner une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. On considère la droite (Δ) admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = \dfrac{1}{2}+2{\cdot}t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

Démontrer que les droites (Δ) et (IJ) sont non-coplonaires.

3. a. Justifier que le plan (AGH) admet pour équation :
$y-z=0$

 b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (IJ) et du plan (AGH).

Exercice 22

Pour cet exercice, recopier pour chaque question, votre réponse.
Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée.
Il sera retié 0,5 point par réponse fausse.
La note finale de l'exercice ne pourra pas être inférieure à zéro.

Soit $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé.

1. La droite passant par $A\left(1\,;2\,;-4\right)$ et $B\left(-3\,;4\,;1\right)$ et la droite (d) représentée par :

$$\begin{cases} x = -11-4t \\ y = 8+2t \\ z = 11+5t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

 a. sécantes b. strictement parallèles

 c. confondues d. non coplanaires

2. Soient le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+3y-z+4=0$ et la droite $\mathscr{D}$ représentée par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 8+t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

 a. $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont sécants

 b. $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont strictement parallèles

 c. $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$

 d. Aucune de ces possibilités n'est vraie.

3. La distance du point $A\left(1\,;2\,;-4\right)$ au plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ est :

 a. $\dfrac{8\sqrt{14}}{7}$ b. 16 c. $8\sqrt{14}$ d. $\dfrac{8}{7}$

4. Soient le point $B\left(-3\,;4\,;1\right)$ et la sphère $\mathscr{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=16$:

 a. B est à l'intérieur de $\mathscr{S}$ b. B est à l'extérieur de $\mathscr{S}$

 c. B est sur $\mathscr{S}$ d. On ne sait pas

Exercice 23

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$, on considère les deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne :

$(\mathcal{P})$: $2x-y+z+3=0$; $(\mathcal{P}')$: $-4x+2y-2z-1=0$

Justifier que ces deux plans sont parallèles.

Exercice 24

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$, on considère les deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne :

$$(\mathcal{P}) :\ x + 2y - z + 3 = 0 \quad ; \quad (\mathcal{P}') :\ 4x - 2y + z - 1 = 0$$

1. Justifier que ces deux plans sont sécants.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.