CORRECTIONS

Exercices : Equations cartésiennes et représentations paramétriques

Correction 1

On a :

$$\begin{cases} x+2y-z=-2 \\ 3x+y+2z=-1 \\ x-y+3z=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+6y-3z=-6 \\ 3x+y+2z=-1 \\ 3x-3y+9z=9 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x+6y-3z=-6 \\ 5y-5z=-5 \\ 9y-12z=-15 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+6y-3z=-6 \\ 45y-45z=-45 \\ 45y-60z=-75 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x+6y-3z=-6 \\ 45y-45z=-45 \\ 15z=30 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+6y-3z=-6 \\ 45y-45z=-45 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x+6y-3z=-6 \\ 45y-90=-45 \\ z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+6y-3z=-6 \\ 45y=45 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x+6y-3z=-6 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+6-6=-6 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x=-6 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

Correction 2

On a :

$$\begin{cases} 3x+y-z=1 \\ x-y+2z=2 \\ -x+5y-9z=-5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+y-z=1 \\ 3x-3y+6z=6 \\ 3x-15y+27z=15 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x+y-z=1 \\ 4y-7z=-5 \\ 16y-28z=-14 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+y-z=1 \\ 16y-28z=-20 \\ 16y-28z=-14 \end{cases}$$

Par addition des deux dernières équations, on obtient :
$0y-0z=-6$
Cette équation ne peut avoir de solution.

Correction 3

On a :

$$\begin{cases} 10x+10y-10z=50 \\ 10x-5y+20z=-10 \\ 10x-2y+14z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 10x+10y-10z=50 \\ 15y-30z=60 \\ 12y-24z=48 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 10x+10y-10z=50 \\ y-2z=4 \\ y-2z=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 10x+10y-10z=50 \\ y-2z=4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 10x+10y-10z=50 \\ y=4+2z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y-z=5 \\ y=4+2z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+\big(4+2z\big)-z=5 \\ y=4+2z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=4+2z \end{cases}$$

Ainsi, ce système admet une infinité de solutions :
$\mathcal{S}=\Big\{(1-z\,;4+2z\,;z)\ \Big|\ z\in\mathbb{R}\Big\}$

Correction 4

a. La droite (d) admet pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=3-t \\ y=-2t \\ z=-2+t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R}$$

b. La droite (d) admet pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1 \\ z=1-4t \end{cases} \text{ où } t\in\mathbb{R}$$

Correction 5

La droite (d) a pour équation :
$$\begin{cases} x=-2+k \\ y=8+5\cdot k \\ z=4-k \end{cases} \text{ où } k\in\mathbb{R}$$

Correction 6

La représentation paramétrique proposée présente un coefficient directeur de coordonnée $\big(1\,;2\,;3\big)$; ainsi, les deux droites proposées sont parallèles.

La droite donnée par sa représentation paramétrique passe par le point B car pour $t=1$, on a :
$\big(1+1\,;2\times1+1\,;3\times1+1\big)=\big(2\,;3\,;4\big)$

Correction 7

1. a. Résolvons le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}=-1+t \\ 4=1+2t \\ -\frac{5}{2}=2-3t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2}+1 \\ 2\cdot t=4-1 \\ -3t=-\frac{5}{2}-2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} t=\frac{3}{2} \\ 2\cdot t=3 \\ -3\cdot t=-\frac{9}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t=\frac{3}{2} \\ t=\frac{3}{2} \\ t=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Le système admet une solution : le point A appartient à la droite (d).

b. Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{9}{4}=-1+t \\ \frac{3}{2}=1+2t \\ -\frac{23}{4}=2-3t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t=-\frac{9}{4}+1 \\ 2t=\frac{3}{2}-1 \\ -3t=-\frac{23}{4}-2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} t=-\frac{5}{4} \\ 2t=\frac{1}{2} \\ -3t=-\frac{31}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t=-\frac{5}{4} \\ t=\frac{1}{4} \\ t=\frac{31}{12} \end{cases}$$

Ce système n'admettant pas de solution, on en déduit que le point B n'appartient pas à la droite (d').

2. a. Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} = 1 + \dfrac{3}{2}\cdot t \\ 4 = 3 - 3\cdot t \\ -\dfrac{5}{2} = 4 - \dfrac{9}{2}\cdot t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}\cdot t = \dfrac{1}{2} - 1 \\ -3\cdot t = 4 - 3 \\ -\dfrac{9}{2}\cdot t = -\dfrac{5}{2} + 4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}\cdot t = -\dfrac{1}{2} \\ -3\cdot t = 1 \\ -\dfrac{9}{2}\cdot t = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{1}{3} \\ t = -\dfrac{1}{3} \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

b. Les droites (d) et (d') admettant au moins un point commun, ces deux droites sont soit sécantes, soit parallèles confondues.

Les deux droites (d) et (d') admettent respectivement les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ pour vecteur directeur :

$$\overrightarrow{u}\,(1\,;2\,;-3) \quad ; \quad \overrightarrow{v}\left(\dfrac{3}{2}\,;-3\,;-\dfrac{9}{2}\right)$$

Supposons que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Il existe un réel α tel que :

$\overrightarrow{u} = \alpha\cdot\overrightarrow{v}$

Cette relation entraine les égalités suivantes sur chacune des coordonnées :

$$1 = \alpha\cdot\dfrac{3}{2} \quad ; \quad 2 = \alpha\cdot(-3) \quad ; \quad -3 = \alpha\cdot\left(-\dfrac{9}{2}\right)$$

On remarque qu'il n'existe pas de réel α vérifiant ces relations : les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non-colinéaires.

les droites (d) et (d') sont non-parallèles et possèdent un point commun A : les droites (d) et (d') sont sécantes en A.

Correction 8

1. D'après les représentations paramétriques des droites (d) et (d'), on obtient un vecteur directeur de chacune de ces droites :

- $\overrightarrow{u}\,(2\,;-2\,;6)$ vecteur directeur de (d) ;
- $\overrightarrow{v}\,(-1\,;1\,;-3)$ vecteur directeur de (d').

En remarquant la relation $\overrightarrow{u} = -2\cdot\overrightarrow{v}$, on en déduit que les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires : les droites (d) et (d') sont parallèles.

2. Le point $A(3\,;-1\,;2)$ appartient à la droite (d).
Faisons un raisonnement par l'absurde : supposons que le point A appartienne à la droite (d').
Ainsi, il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x_A = -1 - t \\ y_A = -1 + t \\ z_A = -3\cdot t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3 = -1 - t \\ -1 = -1 + t \\ 2 = -3\cdot t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 0 \\ t = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

On vient d'établir qu'il n'existe pas un réel t réalisant le premier système : le point A n'appartient pas à la droite (d').

Ainsi, les droites (d) et (d') ne peuvent être parallèles-confondues : elles sont parallèles-strictes.

Correction 9

- La droite $\mathcal{D}'$ admet le vecteur $\overrightarrow{v}$ pour vecteur directeur dont les coordonnées sont :
$\overrightarrow{v}\,(2\,;1\,;1)$

  On remarque facileement que les ordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont égales mais que ces vecteurs ne sont pas égaux ; cela est suffisant pour montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ e t $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

  Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles entre elles.

- La droite $\mathcal{D}$ admet la paramétrisation suivante :
$$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 + 2\cdot k \\ z = 3 - k \end{cases} \quad \text{où } k\in\mathbb{R}$$

  Supposons que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes ; alors, il existe $k\in\mathbb{R}$ et $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} 3 + k = 3 + 2\cdot t \\ 1 + 2\cdot k = 3 + t \\ 3 - k = t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k - 2\cdot t = 0 \\ 2\cdot k - t = 2 \\ -k - t = -3 \end{cases}$$

  La soustraction de la première ligne par la troisième permet d'obtenir l'égalité :
$-t = 3 \Longrightarrow t = -3$
  L'égalité de la première ligne permet d'obtenir :
$$k - 2\cdot(-3) = 0$$
$$k + 6 = 0$$
$$k = -6$$
  Or, ces valeurs ne vérifient pas la seconde ligne du système :
$$2\cdot k - t = 2$$
$$2\times(-6) - (-3) = -12 + 3 = -9$$
  Ce système n'admet pas de solution.

On en déduit que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non-coplanaires.

Correction 10

Les deux droites (d) et (d') sont sécantes si, et seulement si, il existe deux valeurs des paramètres t et t' définissant les coordonnées d'un même point.
Ainsi, ces deux valeurs sont solutions du système :

$$\begin{cases} -t = 4 + t' \\ -1 - t = 3 + t' \\ 5 + 3t = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -t - t' = 4 \\ -t - t' = 4 \\ 3t = -6 \end{cases}$$

De la troisième équation, on obtient la valeur de t :
$$3t = -6$$
$$t = \dfrac{-6}{3}$$
$$t = -2$$
En utilisant cette valeur dans la première équation, on a :
$$-t - t' = 4$$
$$-(-2) - t' = 4$$
$$2 - t' = 4$$
$$-t' = 2$$
$$t' = -2$$

Le couple $(-2\,;-2)$ vérifie toutes les équations du système, on en déduit que les droites s'interceptent. En utilisant le paramètre -2 dans la représentation de la droite (d), on obtient les coordonnées du points d'intersection des droites (d) et (d') :

$$\begin{cases} x = -(-2) = 2 \\ y = -1-(-2) = 1 \\ z = 5+3\times(-2) = -1 \end{cases}$$

Ainsi : $M\big(2\,;1\,;-1\big)$

Correction 11

Supposons l'existence du point M intersection des droites (d) et (d'). Ainsi :

- Il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x_M = 1+t \\ y_M = 1+3t \\ z_M = -t \end{cases}$
- Il existe $t'\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x_M = 2+t' \\ y_M = -6-2t' \\ z_M = 3+t' \end{cases}$

Les représentations paramétriques de ces deux droites permettent d'obtenir deux expressions différentes des coordonnées du point M. Ainsi, les paramètres t et t' doivent être solutions du système d'équations :

$$(S) : \begin{cases} 1+t = 2+t' \\ 1+3t = -6-2t' \\ -t = 3+t' \end{cases}$$

La troisième équation permet d'obtenir l'expression du paramètre t en fonction du paramètre t' :

$$-t = 3+t'$$
$$t = -3-t'$$

En utilisant cette expression de t dans la seconde équation, on obtient :

$$1+3t = -6-2t'$$
$$1+3(-3-t') = -6-2t'$$
$$1-9-3t' = -6-2t'$$
$$-8-3t' = -6-2t'$$
$$-3t'+2t' = -6+8$$
$$-t' = 2$$
$$t' = -2$$

On obtient la valeur de t :

$$t = -3-t' = -3-(-2) = -3+2 = -1$$

Vérifions que les deux paramètres $t=-1$ et $t'=-2$ définissent le même point :

$$\begin{cases} x_M = 1+(-1) = 0 \\ y_M = 1+3\times(-1) = -2 \\ z_M = -(-1) = 1 \end{cases} \;;\; \begin{cases} x_M = 2+(-2) = 0 \\ y_M = -6-2\times(-2) = -2 \\ z_M = 3+(-2) = 1 \end{cases}$$

Ainsi, le point d'intersection de ces deux droites a pour coordonnées :

$$M\big(0\,;-2\,;1\big).$$

Correction 12

Supposons l'existence d'un point d'intersection M de ces deux droites. En notant $(x_M\,;y_M\,;z_M)$ les coordonnées du point M, on doit avoir l'existence de deux réels t et u tels que :

$$\begin{cases} x_M = 2-3\cdot t \\ y_M = 1+t \\ z_M = -3+2\cdot t \end{cases} \quad \begin{cases} x_M = 7+2\cdot u \\ y_M = 2+2\cdot u \\ z_M = -6-u \end{cases}$$

Ainsi, les réels t et u doivent vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} 2-3\cdot t = 7+2\cdot u \\ 1+t = 2+2\cdot u \\ -3+2\cdot t = -6-u \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3\cdot t - 2\cdot u = 5 \\ t-2\cdot u = 1 \\ 2\cdot t + u = -3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -3\cdot t - 2\cdot u = 5 \\ 2\cdot t - 4\cdot u = 2 \\ 2\cdot t + u = -3 \end{cases}$$

La soustraction, membre à membre, de la seconde et troisième ligne donne l'équation suivante :

$$0\cdot t - 5\cdot u = 5$$
$$-5\cdot u = 5$$
$$u = -1$$

En utilisant cette valeur dans la troisième équation, on a :

$$2\cdot t + u = -3$$
$$2\cdot t - 1 = -3$$
$$2\cdot t = -3+1$$
$$2\cdot t = -2$$
$$t = -1$$

Vérifiant que ce couple de solution vérifie également la première équation du système :

$$-3\cdot t - 2\cdot u = -3\times(-1) - 2\times(-1) = 3+2 = 5$$

Correction 13

1. D'après les représentations paramétriques :
   - La droite (d) admet pour vecteur directeur : $\overrightarrow{u}\big(2\,;3\,;-1\big)$
   - La drotie (d') admet pour vecteur directeur : $\overrightarrow{v}\big(2\,;-2\,;-2\big)$

   Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ a pour valeur :
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 2\times2+3\times(-2)+(-1)\times(-2) = 4-6+2 = 0$

   On en déduit que les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. Ainsi que les droites (d) et (d') sont orthogonales.

2. Si les deux droites (d) et (d') sont sécantes, il existe un couple $(t\,;t')$ vérifiant le système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} -3+2t = 1+2t' \\ -4+3t = -3-2t' \\ 3-t = -2t' \end{cases}$$

   De la troisième équation, on en déduit la valeur du paramètre t en fonction du paramètre t' :
   $$3-t = -2t'$$
   $$-t = -2t'-3$$
   $$t = 2t'+3$$

   A partir de la deuxième équation, on en déduit :
   $$-4+3t = -3-2t'$$
   $$-4+3(2t'+3) = -3-2t'$$
   $$-4+6t'+9 = -3-2t'$$
   $$6t'+5 = -3-2t'$$
   $$6t'+2t' = -3-5$$
   $$8t' = -8$$
   $$t' = \frac{-8}{8}$$
   $$t' = -1$$

   La valeur de t associée est obtenue à partir de :
   $$t = 2t'+3 = 2\times(-1)+3 = -2+3 = 1$$

   Pour que le couple $(1\,;-1)$ soit solution du système, il doit être également solution de la troisième équation.
   - $-3+2t = -3+2\times1 = -3+2 = -1$
   - $1+2t' = 1+2\times(-1) = 1-2 = -1$

Le couple $(1\,;-1)$ est solution du système.

En utilisant le paramètre $t=1$ dans la représentation paramétrique de la droite (d), on obtient les coordonnées du point d'intersection M :

$$\begin{cases} x = -3+2t = -3+2\times1 = -3+2 = -1 \\ y = -4+3t = -4+3\times1 = -4+3 = -1 \\ z = 3-t = 3-1 = 2 \end{cases}$$

Ainsi : $M\left(-1\,;-1\,;2\right)$

Correction 14

1. D'après les représentations paramétriques des droites (d) et (d'), on a :
   - $\overrightarrow{u}\left(1\,;1\,;0\right)$ est un vecteur directeur de la droite (d) ;
   - $\overrightarrow{v}\left(2\,;1\,;-1\right)$ est un vecteur directeur de la droite (d').

   En remarquant que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles.

   Pour montrer qu'elles sont non-coplanaires, il reste à montrer que les droites (d) et (d') ne sont pas sécantes.

   Par l'absurde, supposons que les droites (d) et (d') sont sécantes, il existe alors il existe une valeur pour chacune des représentations de ces droites donnant les coordonnées du point d'intersection ; on en déduit le système d'équations :

   $$\begin{cases} 3+t = 2+2\cdot t' \\ -5+t = 3+t' \\ 4 = -2-t' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t-2t' = -1 \\ t-t' = 8 \\ t' = -6 \end{cases}$$

   Des deux dernières équations, on en déduit les valeurs :
   $t'=-6 \quad ; \quad t=2$
   Or, ces deux valeurs ne vérifient pas la première équation :
   $t-2\cdot t' = 2-2\times(-6) = 2+12 = 14 \neq -1$

2. a. Si la droite (Δ) est perpendiculaire aux droites (d) et (d'), cela implique que tout vecteur $\overrightarrow{n}$ directeur de (Δ) est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ directeurs des deux droites (d) et (d').

   Notons $(x\,;y\,;z)$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n}$. Ainsi, on a :
   - $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 0$
     $x+y+0\cdot z = 0$
     $x+y=0$
   - $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 0$
     $2\cdot x+y-z=0$

   Ainsi, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n}$ vérifient les égalités :

$x+y=0$	$2\cdot x+y-z=0$
$y=-x$	$2\cdot x+(-x)-z=0$
	$-z=-x$
	$z=x$

   Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ admet pour coordonnées :
   $\overrightarrow{n}(x\,;-x\,;x)$

   En prenant $x=1$, on a : $\overrightarrow{n}\left(1\,;-1\,;1\right)$

   Or, la droite (Δ) étant perpendiculaire à la droite (d), on en déduit que ces deux droites sont coplanaires et orthogonales.
   Notons, A le point d'intersection des droites (Δ) et (d).
   Appartenant à la droite (d), il existe une valeur du paramètre t donnant les coordonnées du point A :
   $A\left(3+t\,;-5+t\,;4\right)$
   Ainsi, la droite (Δ) admet pour représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = 3+t+t' \\ y = -5+t-t' \\ z = 4+t' \end{cases} \quad \text{où } t'\in\mathbb{R}$$

   b. Or, la droite (Δ) et (d') étant perpendiculaires, on en déduit qu'elles sont sécantes. Notons B leur point d'intersection, il existe alors une valeur du paramètre de la représentation de la droite (d') exprimant les coordonnées du point B.

   On en déduit le système :
   $$\begin{cases} 3+t+t' = 2+2t'' \\ -5+t-t' = 3+t'' \\ 4+t' = -2-t'' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t+t'-2t'' = -1 \\ t-t'-t'' = 8 \\ t'+t'' = -6 \end{cases}$$
   $$\Longrightarrow \begin{cases} t+t'-2t'' = -1 \\ 2t'-t'' = -9 \\ t'+t'' = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t+t'-2t'' = -1 \\ 2t'-t'' = -9 \\ 2t'+2t'' = -12 \end{cases}$$
   $$\Longrightarrow \begin{cases} t+t'-2t'' = -1 \\ 2t'-t'' = -9 \\ -3t'' = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = -5 \\ t'' = -1 \end{cases}$$
   Ayant trouvé la valeur du paramètre réalisant la condition que la droite (Δ) ait un point d'intersection avec la droite (d'), on en déduit la représentation paramétrique de la droite (Δ) :
   $$\begin{cases} x = 5+t' \\ y = -3-t' \\ z = 4+t' \end{cases} \quad \text{où } t'\in\mathbb{R}$$

Correction 15

1. Voici les plans associés à chacune des équations cartésiennes :

   a. Le plan d'équation $z=0$ est défini par (ABC).

   b. Le plan (EFG) a pour équation $y=1$.

   c. Les points A, C et E ont leurs coordonnées qui vérifient l'équation cartésienne :
   $x+y=1$
   Ainsi, le plan recherché est (AEG).

   d. On a :
   - $x_B+y_B+z_B = 1+1+0 = 2$
   - $x_G+y_G+z_G = 0+1+1 = 2$
   - $x_E+y_E+z_E = 1+0+1 = 2$

   Ainsi, le plan $x+y+z=2$ est défini par (BEG)

   e. Les coordonnées des points A, C et H vérifient l'équation :
   $x+y+z=1$
   Ce plan est défini par (ACH).

   f. Les points D, B, F appartiennent au plan définie par :
   $x-y=0$
   Le plan d'équation $x-y=0$ est défini par (DBF).

2. a. Le plan (EHD) a pour équation $y=0$.

b. Le plan (FGH) a pour équation $z=1$.

c. Le plan (HDC) a pour équation $x=0$.

3. a. La face $BCGF$ est un carrée ; on en déduit que ses diagonales sont perpendiculaires :
$\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont orthogonaux.

L'arête $[HG]$ est orthogonal à la face $FGCB$; on en déduit que les veceteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont orthogonaux. Or les droites (HG) et (EF) sont parallèles entre elles.

Le vecteur $\overrightarrow{BG}$ est orthogonal à deux vecteurs du plan (EFC) ; on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{BG}$ est orthogonal au plan (EFC).

b. Le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnée :
$\overrightarrow{BG}\,(x_G - x_B\,;y_G - y_B\,;z_G - z_B)$
$= \big(0-1\,;1-1\,;1-0\big) = \big(-1\,;0\,;1\big)$

Soit $M\,(x\,;y\,;z)$ un point du plan (EFC), on doit avoir le produit scalaire suivant :

$$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{MC} = 0$$
$$-1{\cdot}(0-x) + 0{\cdot}(1-y) + 1{\cdot}(0-z) = 0$$
$$x - z = 0$$

Correction 16

1. Le vecteur $\overrightarrow{n}\,\big(1\,;-1\,;3\big)$ étant un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$, il admet une équation cartésienne de la forme :
$x - y + 3{\cdot}z + d = 0$ où $d\in\mathbb{R}$

Le point A étant un point du plan $(\mathcal{P})$, ses coordonnées vérifient l'équation du plan. Ainsi, le nombre réel d vérifie l'équation suivante :

$$x_A - y_A + 3{\cdot}z_A + d = 0$$
$$1 - 2 + 3\times(-1) + d = 0$$
$$1 - 2 - 3 + d = 0$$
$$d - 4 = 0$$
$$d = 4$$

On en déduit une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$:
$(\mathcal{P})$: $x - y + 3{\cdot}z + 4 = 0$

2. Vérifions si les coordonnées de chacun de ces points vérifient ou non l'équation cartésienne obtenue lors de la question 1. :

- $x_B - y_B + 3{\cdot}z_B + 4 = 2 - 8 + 3\times1 + 4$
$= 2 - 8 + 3 + 4 = 1$
Les coordonnées du point B ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$, on en déduit que le point B n'est pas un point du plan.
- $x_C - y_C + 3{\cdot}z_C + 4 = -2 - 5 + 3 + 4 = 0$
Les coordonnées du point C vérifient l'équation du plan $(\mathcal{P})$. On en déduit que le point C est un point du plan $(\mathcal{P})$.

Correction 17

Le plan admet le vecteur $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal. On en déduit que l'équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ est de la forme :
$2x + y - z + d = 0$ où $d\in\mathbb{R}$.

Le point A étant un point du plan $(\mathcal{P})$, ses coordonnées doivent vérifiés l'équation cartésienne de ce plan :

$$2x_A + y_A - z_A + d = 0$$
$$2\times3 + 1 - 2 + d = 0$$
$$6 + 1 - 2 + d = 0$$
$$5 + d = 0$$
$$d = -5$$

Le plan $(\mathcal{P})$ admet pour équation cartésienne :
$2x + y - z - 5 = 0$

Pour savoir si les points M et N appartient au plan $(\mathcal{P})$, regardons si leurs coordonnées vérifient l'équation cartésienne de ce plan :

- $2x_M + y_M - z_M - 5 = 2\times4 + (-2) - 1 - 5$
$= 8 - 2 - 1 - 5 = 0$
On en déduit que le point M appartient au plan $(\mathcal{P})$.
- $2x_N + y_N - y_N - 5 = 2\times(-2) + 8 - 2 - 5$
$= -4 + 8 - 2 - 5 = -3$
Les coordonnées du point N ne vérifient pas l'équation du plan $(\mathcal{P})$: le point N n'appartient pas au plan $(\mathcal{P})$.

Remarque : il est également possible de vérifier que le produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}$ est nul *(resp. non-nul)* pour affirmer *(resp. infirmer)* que le point M est un point du plan.

Correction 18

1. D'après l'équation cartésienne du plan, le vecteur $\overrightarrow{n}\,\big(5\,;-2\,;1\big)$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.

2. Les plans $(\mathcal{Q})$ et $(\mathcal{P})$ étant parallèles entre eux, on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est également un vecteur normal au plan $(\mathcal{Q})$. Ainsi, son équation cartésienne est de la forme :
$$5{\cdot}x - 2{\cdot}y + z + d = 0 \qquad \text{où } d\in\mathbb{R}$$
Le point A appartenant à ce plan :
$$5\times5 - 2\times(-1) + 2 + d = 0$$
$$25 + 2 + 2 + d = 0$$
$$29 + d = 0$$
$$d = -29$$
Ainsi, le plan $(\mathcal{Q})$ admet pour équation cartésienne :
$5{\cdot}x - 2{\cdot}y + z - 29 = 0$

Correction 19

Le plan médiateur du segment $[AB]$ est le plan perpendiculaire à la droite (AB) passant par le milieu I du segment $[AB]$.

Les coordonnées du point I sont données par la formule :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\frac{y_A + y_B}{2}\,;\frac{z_A + z_B}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{2 + (-1)}{2}\,;\frac{(-3) + 1}{2}\,;\frac{(-1) + 0}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\,;\frac{-2}{2}\,;-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\,;-1\,;-\frac{1}{2}\right)$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A)$
$= \big(-1{-}2\,;1{-}(-3)\,;0{-}(-1)\big) = \big(-3\,;1{+}3\,;1\big) = \big(-3\,;4\,;1\big)$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan médiateur du segment $[AB]$; l'équation cartésienne de ce plan est de la forme :

$$-3{\cdot}x+4{\cdot}y+z+d=0 \qquad \text{où } d\in\mathbb{R}$$

Le point I appartenant à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation de ce plan :

$$\begin{aligned}-3{\cdot}x_I+4{\cdot}y_I+z_I+d&=0\\ -3\times\frac{1}{2}+4\times(-1)+\Big(-\frac{1}{2}\Big)+d&=0\\ -\frac{3}{2}-4-\frac{1}{2}+d&=0\\ -2-4+d&=0\\ -6+d&=0\\ d&=6\end{aligned}$$

Ainsi, le plan médiateur du segment $[AB]$ admet pour expression :

$$-3{\cdot}x+4{\cdot}y+z+6=0$$

Correction 20

1. Le plan $(\mathcal{P})$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\big(1\,;-4\,;1\big)$ comme vecteur normal, son équation cartésienne admet pour expression :

   $$x-4{\cdot}y+z+d=0 \quad \text{où } d\in\mathbb{R}$$

   Le point $A\big(3\,;1\,;2\big)$ appartenant au plan $(\mathcal{P})$, ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de ce plan :

   $$\begin{aligned}x_A-4{\cdot}y_A+z_A+d&=0\\ 3-4\times1+2+d&=0\\ 1+d&=0\\ d&=-1\end{aligned}$$

   Le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne :

   $$x-4{\cdot}y+z-1=0$$

2. - **Méthode 1 :**

     La droite (d) passe par le point $B\big(1\,;4\,;2\big)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{u}\big(1\,;1\,;3\big)$; ainsi, la droite (d) admet pour représentation paramétrique :

     $$\begin{cases}x=1+t\\ y=4+t\\ z=2+3t\end{cases} \qquad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

     Pour montrer que la droite (d) et le plan $(\mathcal{P})$ sont strictement parallèles, nous allons raisonner par l'absurde :

     Supposons que le plan $(\mathcal{P})$ et la droite (d) admettent un point d'intersection : notons M un de ses points d'intersection.

     D'après la représentation paramétrique de la droite (d), il existe un réel t tel que :

     $$M\big(1+t\,;4+t\,;2+3t\big)$$

     Le point M appartenant au plan $(\mathcal{P})$, ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de ce plan :

     $$\begin{aligned}x-4{\cdot}y+z&=0\\ \big(1+t\big)-4{\cdot}\big(4+t\big)+\big(2+3{\cdot}t\big)&=0\\ 1+t-16-4{\cdot}t+2+3{\cdot}t&=0\\ -13+0{\cdot}t&=0\end{aligned}$$

     Cette équation n'admet pas de solution : le point M n'existe pas.

     On en déduit que la droite (d) et le plan $(\mathcal{P})$ n'ont aucun point d'intersection. Les positions relatives d'une droite et d'un plan montre que la droite $\mathcal{D}$ et le plan $(\mathcal{P})$ sont strictement parallèles.

   - **Méthode 2 :**

     On a le produit scalaire :

     $$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=1\times1+(-4)\times1+1\times3=1-4+3=0$$

     On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux : la droite (d) est parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

     Pour montrer que la droite (d) est strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$, il suffit de montrer que la droite (d) n'est pas parallèle confondue au plan $(\mathcal{P})$.

     Pour cela, montrons que le point B appartenant à la droite (d) n'appartient pas au plan $(\mathcal{P})$:

     $$\begin{aligned}x_B-4{\cdot}y_B+z_B-1&=1-4\times4+2-1\\ &=1-16+2-1=-14\end{aligned}$$

     Les coordonnées du point B ne vérifiant pas l'équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$, on en déduit que le point B n'appartient pas au plan $(\mathcal{P})$.

     On vient d'établir que la droite (d) est strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

Correction 21

1. a. Dans le repère $\big(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\big)$, on a les coordonnées :

   $$I\Big(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\Big) \quad ; \quad J\Big(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\Big)$$

   b. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnée :

   $$\begin{aligned}&\overrightarrow{IJ}\,(x_J-x_I\,;y_J-y_I\,;z_J-z_I)\\ &=\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,;0-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}-0\Big)=\Big(0\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\Big)\end{aligned}$$

   La droite (IJ) passe par le point $I\Big(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\Big)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}\Big(0\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\Big)$; ainsi, elle admet pour représentation paramétrique :

   $$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}{\cdot}k\\ z=\frac{1}{2}{\cdot}k\end{cases} \qquad \text{où } k\in\mathbb{R}$$

2. - La droite (Δ) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées :

     $$\overrightarrow{u}\,(1\,;2\,;-1)$$

     En observant les abscisses des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{u}$, on remarque facilement que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

     On en déduit que les deux droites (IJ) et (Δ) ne sont pas parallèles.

   - Supposons l'existence d'un point $M\,(x_M\,;y_M\,;y_M)$ intersection des droites (Δ) et (IJ) ; il existe $t\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{R}$ tels que :

     $$\begin{cases}x_M=\frac{1}{2}\\ y_M=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}{\cdot}k\\ z_M=\frac{1}{2}{\cdot}k\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}x_M=1+t\\ y_M=\frac{1}{2}+2{\cdot}t\\ z_M=-t\end{cases}$$

     Ainsi, les paramètres k et t vérifient le système :

     $$\begin{cases}\frac{1}{2}=1+t\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}{\cdot}k=\frac{1}{2}+2{\cdot}t\\ \frac{1}{2}{\cdot}k=-t\end{cases}$$

De la première ligne, on obtient : $t=-\dfrac{1}{2}$.

De la troisième ligne, on obtient :

$\dfrac{1}{2}\cdot k = -t$

$\dfrac{1}{2}\cdot k = -\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$\dfrac{1}{2}\cdot k = \dfrac{1}{2}$

$k = 1$

Regardons si ces valeurs vérifient la seconde égalité :

- $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot k = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$
- $\dfrac{1}{2}+2\cdot t = \dfrac{1}{2}+2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$

L'inégalité nétant vérifiée, on en déduit que ce système n'admet pas de solution : les droites (Δ) et (IJ) ne sont pas sécantes.

On en déduit que les droites (Δ) et (IJ) ne sont pas coplonaires.

3. a. On a les coordonnées suivantes :

$A\left(0\,;0\,;0\right)$; $G\left(1\,;1\,;1\right)$; $H\left(0\,;1\,;1\right)$

Vérifions que ces trois points appartiennent au plan :
- $y_A - z_A = 0-0=0$;
- $y_G - z_G = 1-1=0$;
- $y_H - z_H = 1-1=0$.

Ainsi, le plan (AGH) admet pour équation :

$y-z=0$

b. Soit $M\left(x_M\,;y_M\,;z_M\right)$ le point d'intersection de la droite (IJ) et du plan (AGH).

Appartenant à la droite (IJ), il existe $k\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{2} \\ y_M = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot k \\ z_M = \dfrac{1}{2}\cdot k \end{cases}$$

Le point M étant un point du plan (AGH), ses coordonnées vérifient l'équation suivante :

$$y_M - z_M = 0$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot k\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot k\right)=0$$
$$\frac{1}{2}-k=0$$
$$k=\frac{1}{2}$$

Ainsi, les coordonnées du point M vérifient :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{2} \\ y_M = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \\ z_M = \dfrac{1}{2}\cdot k = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Le point d'intersection de la droite (IJ) et (AGH) a pour coordonnée :

$M\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{1}{4}\right)$

Correction 22

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A\right)$

$=\left(-3-1\,;4-2\,;1-(-4)\right)=\left(-4\,;2\,;5\right)$

La droite (d) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\left(-4\,;2\,;5\right)$

Ainsi, la droite (d) et (AB) sont parallèles entre elles.

Supposons que le point A appartienne à la droite (d), alors il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x_A = -11-4\cdot t \\ y_A = 8+2\cdot t \\ z_A = 11+5\cdot t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 = -11-4\cdot t \\ 2 = 8+2\cdot t \\ -4 = 11+5\cdot t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 12 = -4\cdot t \\ -6 = 2\cdot t \\ -15 = 5\cdot t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -3 \end{cases}$$

Ainsi, la droite (AB) et (d) sont parallèles et possède au moins un point en commun : elles sont parallèles confondues.

La réponse attendue est la réponse c..

2. Le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\left(2\,;3\,;-1\right)$ pour vecteur normal.

La droite $\mathscr{D}$ admet le vecteur $\overrightarrow{u}\left(1\,;1\,;1\right)$ pour vecteur directeur.

On a le produit scalaire :

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 2\times1+3\times1+(-1)\times1 = 2+3-1=4$

Le vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ n'étant pas orthogonal au vecteur normal du plan $\mathscr{P}$, on en déduit que la droite $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Ainsi, la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

La réponse est a..

3. La formule de calcul de la distance d'un point à un plan donne :

$$d\left(A\,;\,\mathscr{P}\right) = \frac{\left|2\times1+3\times2+(-1)\times(-4)+4\right|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}$$
$$= \frac{\left|2+6+4+4\right|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{16}{\sqrt{14}} = \frac{16\cdot\sqrt{14}}{14} = \frac{8\cdot\sqrt{14}}{7}$$

La réponse est a..

4. Soit M un point quelconque de la sphère $\mathscr{S}$, on a :

$$x^2+y^2+z^2=16$$
$$\left(x_M-x_O\right)^2+\left(y_M-y_O\right)^2+\left(z_M-z_O\right)^2=4^2$$
$$OM^2=4^2$$
$$OM=4$$

Ainsi, la sphère $\mathscr{S}$ a pour centre le point O et son rayon mesure 4.

Déterminons la distance OB :

$$OB=\sqrt{\left(x_B-x_O\right)^2+\left(y_B-y_O\right)^2+\left(z_B-Z_O\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(-3\right)^2+4^2+1^2}=\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}$$

On a la comparaison : $\sqrt{26}>4 \Longrightarrow OB>r_{\mathscr{S}}$

Ainsi, le point B se situe à l'extérieur de la sphère $\mathscr{S}$.

Correction 23

L'équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ permet d'affirmer que le vecteur $\overrightarrow{u}\left(2\,;-1\,;1\right)$ est normal à ce plan.

L'équation cartésienne du plan $(\mathcal{P}')$ permet d'affirmer que le vecteur $\vec{v}\big(-4\,;2\,;-2\big)$

On établit facilement la relation : $\overrightarrow{v}=-2\cdot\overrightarrow{u}$

Ainsi, les deux vecteur normaux $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, on en déduit que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont deux plans parallèles.

Correction 24

1. D'après l'équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$, le vecteur $\overrightarrow{u}\big(1\,;2\,;-1\big)$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.

   D'après l'équation cartésienne du plan $(\mathcal{P}')$, le vecteur $\overrightarrow{v}\big(4\,;-2\,;1\big)$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P}')$.

   Considérons le système suivant :
   $$\begin{cases} 1 = k\times 4 \\ 2 = k\times(-2) \\ 1 = k\times 1 \end{cases}$$

   Ce système n'admettant pas de solution, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires : on en déduit que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas parallèles.

   Ainsi, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants.

2. Deux méthodes sont possibles :

   - **1er méthode :**
   On détermine un vecteur directeur puis un point appartenant à l'intersection des deux plans :
   Soit $\overrightarrow{w}\,(x\,;y\,;z)$ un vecteur directeur de la droite (d).
   Alors $\overrightarrow{w}$ est orthogonal aux vecteurs normals aux deux plans. Ainsi, on a :
   $$\begin{cases} \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} = 0 \\ \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1\cdot x + 2\cdot y - 1\cdot z = 0 \\ 4\cdot x - 2\cdot y + 1\cdot z = 0 \end{cases}$$
   L'addition de deux équations donne :
   $$5\cdot x = 0$$
   $$x = 0$$
   Ainsi, le système devient :
   $$\begin{cases} 2\cdot y - z = 0 \\ -2\cdot y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\cdot y - z = 0 \\ 2\cdot y - z = 0 \end{cases}$$
   Ainsi, on en déduit :
   $$2\cdot y - z = 0$$
   $$z = 2\cdot y$$
   Ainsi, tout vecteur $\overrightarrow{w}$ directeur de la droite (d) s'exprime en fonction de y par :
   $\overrightarrow{w}\,\big(0\,;y\,;2y\big)$.

   On en déduit que $\overrightarrow{w}_0\,\big(0\,;1\,;2\big)$ est un vecteur directeur de la droite (d).
   Déterminons un point A d'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ayant pour ordonnée 0 : $A\,(x\,;0\,;z)$. Ses coordonnées doivent vérifier leurs deux équations cartésiennes :
   $$\begin{cases} x + 2\times 0 - z + 3 = 0 \\ 4x - 2\times 0 + z - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - z = -3 \\ 4x + z = 1 \end{cases}$$
   Par addition de ces deux équations, on a :
   $$5\cdot x = -2$$
   $$x = -\frac{2}{5}$$
   On en déduit la valeur de la côte de A :
   $$x - z = -3$$
   $$-\frac{2}{5} - z = -3$$
   $$-z = -3 + \frac{2}{5}$$
   $$-z = -\frac{13}{5}$$
   $$z = \frac{13}{5}$$
   Ainsi, le point A a pour coordonnées : $A\Big(-\frac{2}{5}\,;0\,;\frac{13}{5}\Big)$
   Ainsi, la droite (d) a pour représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = t \\ z = \frac{13}{5} + 2\cdot t \end{cases}$$

3. **2nd méthode :**
   Tout point $M\,(x\,;y\,;z)$ de (d) a ses coordonnées qui vérifient les équations cartésiennes des plans $((\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$: doit vérifier le système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0 \\ 4x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 8y - 4z + 12 = 0 \\ 4x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$
   Par soustraction de ces deux équations membre à membre, on obtient l'équation suivante :
   $$10y - 5z + 13 = 0$$
   Donnons l'expression de z en fonction de y :
   $$-5z = -10y - 13$$
   $$z = 2y - \frac{13}{-5}$$
   $$z = \frac{13}{5} + 2\cdot y$$
   En utilisant la première équation, on obtient l'expression de l'abscisse x en fonction de y :
   $$x + 2y - z + 3 = 0$$
   $$x + 2y - \Big(\frac{13}{5} + 2\cdot y\Big) + 3 = 0$$
   $$x + 2y - \frac{13}{5} - 2y + 3 = 0$$
   $$x + \frac{2}{5} = 0$$
   $$x = -\frac{2}{5}$$
   Ainsi, tout point M appartenant à l'intersection des deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ a pour coordonnées :
   $M\left(-\frac{2}{5}\,;y\,;2y + \frac{13}{5}\right)$
   où y est un nombre réel.

   Ainsi, la droite d'intersection admet pour équation paramétrique :
   $$(d) : \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = t \\ z = \frac{13}{5} + 2\cdot t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$