CORRECTION EXERCICE 2 TYBE BAC GEOMETRIE

On considère les points P(0 ; 0 ; 1), Q(0 ; 2 ; 3) et R(1 ; 0 ; 3).

1. Voir l'annexe.

2. On a $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Donc $PR^2 = \left\|\overrightarrow{PR}\right\|^2 = 1^2+0^2+2^2 = 1+4 = 5$ et $QR= \left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2 = 1^2+(-2)^2+0^2 = 1+4 = 5$.
Donc $PR = QR = \sqrt{5}$: le triangle (PQR) est isocèle en R.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}$ ne sont pas colinéaires donc les points P, Q et R ne sont pas alignés : les points P, Q et R définissent un plan.

4. **a.**
- $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{u} = 2+0-2 = 0$;
- $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{u} = 2-2+0 = 0$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{u}(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR) est normal à ce plan.

b. On sait qu'alors $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(PQR) \iff 2x+1y-1z=d,\quad d\in\mathbb{R}$.
En particulier $P(0\ ;\ 0\ ;\ 1)\in(PQR) \iff 2\times0+1\times0-1\times1=d \iff -1=d$.
On a donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(PQR) \iff 2x+y-z=-1$.

c. Si d est orthogonale au plan (PQR) elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}$.
On a donc :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(d) \iff \overrightarrow{EM}=t\overrightarrow{u} \iff \left\{\begin{array}{l}x-0=2t\\y-0=1t\\z-3=-1t\end{array}\right.,t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl}x&=&2t\\y&=&t\\z&=&-t+3\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}.$$

d. Si L est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR), la droite (LE) est perpendiculaire à ce plan donc l appartient à (d) et ce point L appartient aussi au plan (PQR). les coordonnées de L vérifient donc le système d'équations :

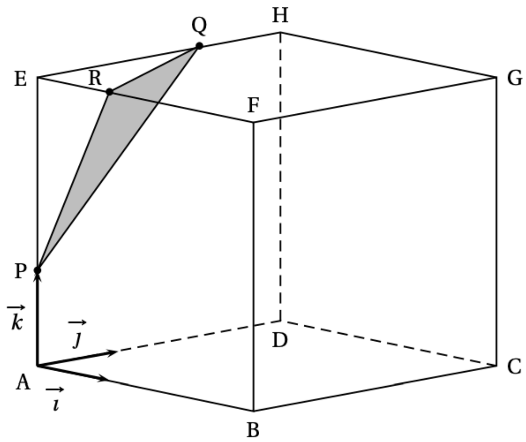
$$\left\{\begin{array}{l}x-0=2t\\y-0=1t\\z-3=-1t\\2x+y-z\quad=\quad-1\end{array}\right.,t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{l}x=2t\\y=t\\z=-t+3\\2x+y-z\quad=\quad-1\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$2\times2t+t-(-t+3)=-1 \iff 6t-3=-1 \iff 6t=2 \iff t=\frac{1}{3}$. $L\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$. On a donc $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$ et $z=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$.

e. On a donc avec $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, on déduit $EL^2=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}$.

La distance de E au plan (PQR) est donc égale à $EL=\frac{\sqrt{6}}{3}$.



5. Si on prend EQR comme base la hauteur est [PE].
On a $\mathscr{A}(EQR)=\frac{EQ\times ER}{2}=\frac{2\times1}{2}=1$ et PE = 2, donc :
$V(EPQR)=\frac{1}{3}\times1\times2=\frac{2}{3}$.

6. On a aussi $V(EPQR)=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}(PQR)=\times EL$, soit
$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}(PQR)\times\frac{\sqrt{6}}{3} \iff \mathscr{A}(PQR)=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$.
Rem. On peut retrouver cette aire en calculant l'aire de ce triangle isocèle directement