Exercices : Fonction ln partie 2

Exercice 1

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2\cdot\ln x + x$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-3^+} \ln(x+3) - 3\cdot x$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \ln(x) - \dfrac{1}{x}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln\left(e^x+1\right)$

e. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} e^{-2\cdot\ln x+1}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln\left(x^2-x\right)$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x\cdot\ln x$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \ln(x)\cdot(x^2+2)$

e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x-2}{\ln x}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 3

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x\cdot\ln x$ b. $g(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x^2+1}$

c. $h(x) = \ln\left(\sqrt{1-x}\right)$ d. $j(x) = \ln\left(e^x-1\right)$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par :
$f(x) = x^2\cdot\ln x$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Etudier les variations de f sur $\left]0\,;+\infty\right[$
2. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer qu'il existe une tangente unique à la courbe $\mathscr{C}$ passant par O. Préciser une équation de cette tangente.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ d'unité graphique 3 *cm*.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat?

On admet que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x) = 1 + \frac{1-\ln x}{x}$$

et que la fonction f est strictement croissante. On note (d) la droite d'équation $y=x$.

2. a. Déterminer l'abscisse du point A de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente $(\mathcal{T})$ est parallèle à la droite (d).
   b. Déterminer l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$.
3. A l'aide de la calculatrice, tracer les droites (d) et $(\mathcal{T})$ et la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
$f(x)=-3-\ln x+2\cdot(\ln x)^2$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

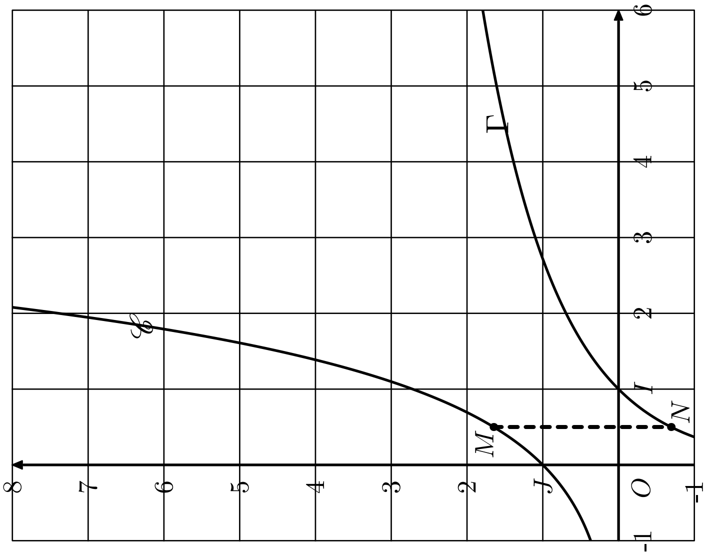
1. a. Résoudre dans $\left]0\,;+\infty\right[$ l'équation : $f(x)=0$.
   (On pourra poser : $\ln x=X$).
   b. Résoudre dans $\left]0\,;+\infty\right[$ l'inéquation : $f(x)>0$.
2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Calculer $f'(x)$.
   c. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
3. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.
4. On se propose d'étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$. Pour cela, on considère la fonction φ, définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par :
   $\varphi(x) = f(x) - \left(4\cdot e^{-\frac{5}{4}}\cdot x - \dfrac{41}{8}\right)$
   a. Montrer que : $\varphi'(x)=\dfrac{4\cdot\ln x-1}{x}-4\cdot e^{-\frac{5}{4}}$
   puis calculer $\varphi''(x)$.
   b. Etudier le sens de variation de φ' sur $\left]0\,;+\infty\right[$.
   En déduire que, pour tout x appartenant à $\left]0\,;+\infty\right[$, on a : $\varphi'(x)\leqslant 0$.
   c. Calculer $\varphi\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $\left]0\,;+\infty\right[$, déterminer le signe de $\varphi(x)$.
   En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{T})$. *(unité graphique : 2 cm)*

Exercice 7

1. Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
   $f(x) = x\cdot e^x - 1$
   a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.
   b. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthornormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et Γ sont données ci-dessous :



Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x.

On rappelle que pour tout réel x strictement positif :
$\mathrm{e}^x > \ln(x)$.

a. Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x=\alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur à 10^{-2} près.

b. En utilisant la question 1., monter que : $\mathrm{e}^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$.
En déduire que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par :
$f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par :
$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$
Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;+\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout x de $[1\,;+\infty[$:
$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.

Exercice 9

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=2x^3-1+2\cdot\ln x$

1. Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.

3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.

3. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$. On prendra comme unités : $2\,cm$ sur l'axe des abscisses et $1\,cm$ sur l'axe des ordonnées.

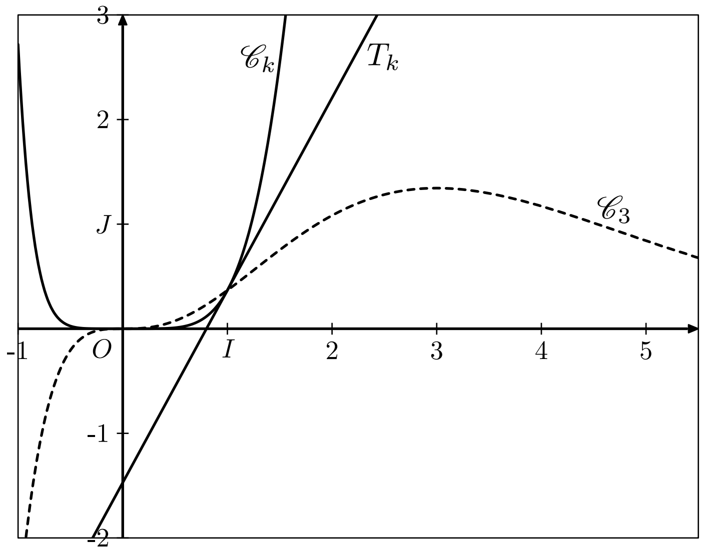
Exercice 10

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie par :
$f_n(x) = x^n\cdot\mathrm{e}^{-x}$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5}\,;0\right)$.



1. a. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Etudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.

c. A l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

2. a. Démontrer que pour $n\geqslant 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.

b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x :
$f_n'(x) = x^{n-1}\cdot(n-x)\cdot\mathrm{e}^{-x}$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x=3$. Valider cette conjecture à l'aide

d'une démonstration.

4. a. Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}\,;0\right)$.

   b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

Exercice 11

Partie A

On considère la famille de fonctions (f_k) définie pour $k\in\mathbb{N}$ par : $f_k(x)=(x+k)\cdot e^x+x$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans une repère orthonormé.

Quelle fonction de la famille (f_k) admet la droite (d) d'équation $y=x-e^{-2}$ comme tangente au point d'abscisse -2.

Partie B

1. On considère la fonction g définie par :
   $g(x)=(x+1)\cdot e^x+e^{-2}$.

   a. Déterminer l'expression de la fonction g'.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

2. Déduire des questions précédentes la position relative de la courbe $\mathscr{C}_1$ et de la droite (d).

Exercice 12

1. On considère la fonction g définie sur $[1\,;+\infty[$ par :
   $g(x)=\ln(2x)+1-x$

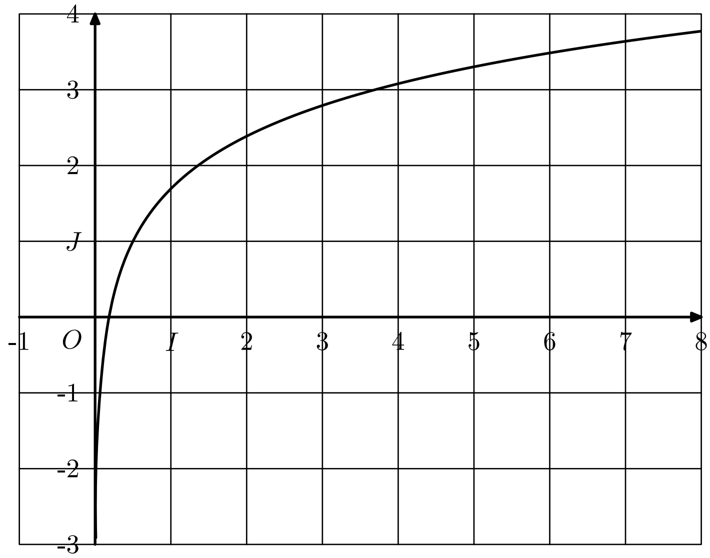
   a. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.*

   Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[1\,;+\infty[$ une unique solution notée α.

   b. Démontrer que : $\ln(2\cdot\alpha)+1=\alpha$

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, par :
   $u_{n+1}=\ln(2\cdot u_n)+1$.

   On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y=\ln(2\cdot x)+1$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous :



   a. En utilisant la courbe (Γ), construire sur l'axe des abscisses les quatres premiers termes de la suite.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n :
   $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 3$

   c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$f(x)=x+e^{-x}$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Partie A

1. Etudier les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :
$u_1=0\quad;\quad u_{n+1}=f(u_n)=u_n+e^{-u_n}$

1. Démontrer que, pour tout réel x positif :
   $\ln(1+x)\leqslant x$
   On pourra étudier la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
   $g(x)=x-\ln(1+x)$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non-nul :
   $\ln(n+1)\leqslant\ln(n)+\dfrac{1}{n}$

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $f\big[\ln(n)\big]=\ln(n)+\dfrac{1}{n}$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non-nul :
   $\ln n\leqslant u_n$

5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 14

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}=u_n-\ln\left({u_n}^2+1\right)$

On admet que la fonction f définie par :

$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$
est croissante sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $\left[0\,;1\right]$.

2. Etudier les variations de la suite $\left(u_n\right)$.

3. Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente.

4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité :
   $f(\ell) = \ell$
   En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 15

Dans un jeu aléatoire, l'évènement G "*la partie est gagnée*" a une probabilité de :

$$\mathcal{P}(G) = \frac{23}{180}$$

1. Un joueur répète six foix ce jeu de manière indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

2. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9?