CORRECTIONS

Exercices : Fonction ln partie 2

Correction 1

a. On a les deux limites :
$\lim_{x\mapsto+\infty} 2\cdot\ln x=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} x=+\infty$
On en déduit la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto+\infty} 2\cdot\ln x+x=+\infty$

b. On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto-3^+} \ln(x+3)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-3^+} -3\cdot x=9$
On en déduit la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto-3^+} \ln(x+3)-3\cdot x=-\infty$

c. On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto0^+} \ln(x)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto0^+} -\frac{1}{x}=-\infty$
On en déduit la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto0^+} \ln(x)-\frac{1}{x}=-\infty$

d. On a la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^x+1=+\infty$
La fonction logarithmique est continue et admet la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto+\infty} \ln x=+\infty$
Par composition des limites, on a :
$\lim_{x\mapsto+\infty} \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)=+\infty$

e. On a la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto0^+} \ln x=-\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\mapsto0^+} -2\cdot\ln x+1=+\infty$
La fonction exponentielle est continue et admet la limite suivante : $\lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$
Par composition des fonctions, on a la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto0^+} \mathrm{e}^{-2\cdot\ln x+1}=+\infty$

f. Remarquons la factorisation suivante :
$x^2-x=x\cdot\left(x-1\right)$
On a les deux limites :
$\lim_{x\mapsto+\infty} x=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} x-1=+\infty$
On en déduit la limite : $\lim_{x\mapsto+\infty} x^2-x=+\infty$
La fonction logarithme est continue et admet la limite suivante : $\lim_{x\mapsto+\infty} \ln x=+\infty$
Par composition des fonctions, on a la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto+\infty} \ln\left(x^2-x\right)=+\infty$

Correction 2

a. D'après le cours, on a : $\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$

b. D'après le cours, on a : $\lim_{x\mapsto0^+} x\cdot\ln x=0$

c. On a : $\lim_{x\mapsto0} \frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\mapsto0} \frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}$
Cette limite correspond à la définition du nombre dérivée de la fonction logarithme en 1. Cette limite a pour valeur :
$\lim_{x\mapsto0} \frac{\ln(1+x)}{x}=(\ln)'(1)=1$

d. On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto0^+} \ln(x)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto0^+} x^2+2=2$
On en déduit la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto0^+} \ln(x)\cdot(x^2+2)=-\infty$

e. On a la transformation algébrique suivante :
$\frac{x-2}{\ln x}=\frac{x}{\ln x}-\frac{2}{\ln x}$
On a les deux limites suivantes :
- $\lim_{n\mapsto+\infty} \ln(x)=+\infty \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{\ln x}=0$
- On a la limite suivante :
$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x}=0^+ \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{x}{\ln x}=+\infty$

On en déduit la limite suivante : $\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x-2}{\ln x}=+\infty$

f. Puisque $x\neq0$, on a la transformation algébrique suivante :
$$x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln 1}{\frac{1}{x}}$$
En posant le changement de variable $X=\frac{1}{x}$, on a :
- $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln 1}{\frac{1}{x}}=\frac{\ln\left(1+X\right)-\ln\left(1\right)}{X}$
- quand x tend vers $+\infty$, la variable X tend vers 0^+.

Ainsi, on a l'égalité des deux limites :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln 1}{\frac{1}{x}}=\lim_{X\mapsto0^+} \frac{\ln\left(1+X\right)-\ln\left(1\right)}{X}$$
Or, la limite $\lim_{X\mapsto0^+} \frac{\ln(1+X)-\ln(1)}{X}$ correspond à la valeur du nombre dérivée en 1 de la fonction logarithme.
On en déduit : $\lim_{x\mapsto+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

Correction 3

a. la fonction f est définie comme le produit des fonctions u et de v définies par :
$u(x)=x \quad ; \quad v(x)=\ln x$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=\frac{1}{x}$
La formule de dérivation d'un produit donne l'expression de la fonction f' :
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

b. La fonction g est définie comme le quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x)=\ln x+1 \quad ; \quad v(x)=x^2+1$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=\frac{1}{x} \quad ; \quad v'(x)=2\cdot x$

La formule de dérivation d'un quotient donne l'expression de la fonction g' :

$$g'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{x}\cdot\left(x^2+1\right)-\left(\ln x+1\right)\cdot 2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$=\frac{x\cdot\left[\frac{1}{x}\cdot\left(x^2+1\right)-\left(\ln x+1\right)\cdot 2\cdot x\right]}{x\cdot\left(x^2+1\right)^2}$$
$$=\frac{x^2+1-2\cdot x^2\cdot\ln x-2\cdot x^2}{x\cdot\left(x^2+1\right)^2}$$

c. La fonction h est donnée sous la forme $\ln u$ où :

$$u(x)=\sqrt{1-x}\quad;\quad u'(x)=\frac{-1}{2\cdot\sqrt{1-x}}$$

La formule de dérivation de la fonction logarithme donne :

$$h'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\frac{-1}{2\cdot\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$
$$=-\frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{1-x}\right)^2}=-\frac{1}{2\cdot|1-x|}=-\frac{1}{2\cdot(1-x)}$$

d. La fonction j est définie comme la composée de la fonction u par la fonction logarithme où :

$$u(x)=e^x-1\quad;\quad u'(x)=e^x$$

La formule de la dérivée de la composée d'un fonction par la fonction logarithme donne l'expression de la fonction j' :

$$j'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{e^x}{e^x-1}$$

Correction 4

1. a. On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}x^2=+\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}\ln x=+\infty$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}x^2\cdot\ln x=+\infty$$

b. Pour étudier la variation de la fonction f, déterminer l'expression de la dérivée de la fonction f.
La fonction f est définie par le produit des fonctions u et v où :

$$u(x)=x^2\quad;\quad v(x)=\ln x$$

qui admettent par dérivée :

$$u'(x)=2x\quad;\quad v'(x)=\frac{1}{x}$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f :

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}$$
$$=2x\cdot\ln x+x=x\cdot\left(2\cdot\ln x+1\right)$$

Résolvons l'inéquation suivante :

$$2\cdot\ln x+1>0$$
$$2\cdot\ln x>-1$$
$$\ln x>\frac{-1}{2}$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$e^{\ln x}>e^{-\frac{1}{2}}$$
$$x>e^{-\frac{1}{2}}$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2\cdot\ln x+1$			‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$			‖	$-$	0	$+$	

On en déduit :

- La fonction f est décroissante sur $\left]0\,;e^{-\frac{1}{2}}\right]$;
- La fonction f est croissante sur $\left]e^{-\frac{1}{2}}\,;+\infty\right]$;

2. Soit a un nobre appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation :

$$y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$$
$$=\big[a\cdot\left(2\cdot\ln a+1\right)\big]\cdot(x-a)+a^2\cdot\ln a$$
$$=\big[a\cdot\left(2\cdot\ln a+1\right)\big]\cdot x-a^2\cdot\left(2\cdot\ln a+1\right)+a^2\cdot\ln a$$
$$=\big[a\cdot\left(2\cdot\ln a+1\right)\big]\cdot x-a^2\cdot\left(2\cdot\ln a+1-\ln a\right)$$
$$=\big[a\cdot\left(2\cdot\ln a+1\right)\big]\cdot x-a^2\cdot\left(\ln a+1\right)$$

Ainsi, la tangente passe par l'origine si son ordonnée à l'origine est nul. Résolvons l'équation suivante :

$$-a^2\cdot\left(\ln a+1\right)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{r|r} -a^2=0 & \ln a+1=0 \\ a=0 & \ln a=-1 \\ & e^{\ln a}=e^{-1} \\ & a=e^{-1} \end{array}$$

f étant définie sur $]0\,;+\infty[$, cette condition n'est vérifiée que pour $a=e^{-1}$.

On a les deux valeurs suivantes :

- $f\left(e^{-1}\right)=\left(e^{-1}\right)^2\cdot\ln\left(e^{-1}\right)=e^{-2}\times(-1)=-e^{-2}$
- $f'\left(e^{-1}\right)=e^{-1}\cdot\Big[2\cdot\ln\left(e^{-1}\right)+1\Big]=e^{-1}\cdot\big[2\times(-1)+1\big]$
  $=e^{-1}\cdot\left(-2+1\right)=-e^{-1}$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e^{-1} a pour équation :

$$y=f'\left(e^{-1}\right)\cdot\left(x-e^{-1}\right)+f\left(e^{-1}\right)$$
$$=-e^{-1}\cdot\left(x-e^{-1}\right)-e^{-2}=-e^{-1}\cdot x+e^{-2}-e^{-2}$$
$$=-e^{-1}\cdot x$$

Correction 5

1. On a les deux limites :

$$\lim_{x\mapsto0^+}\ln x=-\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto0^+}x=0^+$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$$

Pour la fonction f, on a la limite :

$$\lim_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \mapsto 0^+} x + \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale en 0.

2. a. Le coefficient directeur de la droite (d) a pour valeur 1.

Pour que la tangente $(\mathcal{T})$ soit parallèle à la droite (d), il est nécessaire que le nombre dérivée de la fonction f vale 1.

Résolvons l'équation :

$$f'(x) = 1$$

$$1 + \frac{1 - \ln x}{x} = 1$$

$$\frac{1 - \ln x}{x} = 0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul :

$$1 - \ln x = 0$$

$$-\ln x = -1$$

$$\ln x = 1$$

$$e^{\ln x} = e^1$$

$$x = e$$

Le point A a pour abscisse e.

b. La tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e a pour équation réduite :

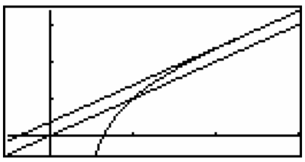
$$y = f'(e) \cdot (x - e) + f(e)$$

$$y = 1 \cdot (x - e) + e + \frac{\ln e}{e}$$

$$y = x - e + e + \frac{1}{e}$$

$$y = x + e^{-1}$$

3. Voici la représentation de ces trois courbes :



Correction 6

1. a. Résolvons l'équation :

$$-3 - \ln x + 2 \cdot (\ln x)^2 = 0$$

Effectuons le changement de variable $X = \ln x$

$$-3 - X + 2 \cdot X^2 = 0$$

$$2 \cdot X^2 - X - 3 = 0$$

Le polynôme du membre de gauche admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (3) = 1 + 24 = 25$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) - 5}{2 \times 2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) + 5}{2 \times 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Ainsi, les valeurs de x solutions de l'équation $f(x) = 0$ doivent vérifier :

$$\ln x_1 = X_1 \qquad \ln x_1 = -1 \qquad e^{\ln x_1} = e^{-1} \qquad x_1 = e^{-1}$$

$$\ln x_2 = X_2 \qquad \ln x_2 = \frac{3}{2} \qquad e^{\ln x_2} = e^{\frac{3}{2}} \qquad x_2 = e^{\frac{3}{2}}$$

Cette équation admet pour ensemble de solution :

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{-1} \,;\, e^{\frac{3}{2}} \right\}$$

b. Pour étudier le signe de $f(x)$, on utilise encore le changement de variable $X = \ln x$; de plus, le coefficient du second degré de ce polynôme est strictement positif et l'étude faite à la question a. permet d'obtenir le tableau de signes suivant :

X	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2 \cdot X^2 - X - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce polynôme est strictement positif pour les valeurs de X appartenant à l'ensemble :

$$\left]-\infty \,;\, -1\right[\cup \left]\frac{3}{2} \,;\, +\infty\right[$$

Par le changement de variable posé, on en déduit que la fonction f est strictement positif sur l'ensemble :

$$\left]0 \,;\, e^{-1}\right[\cup \left]e^{\frac{3}{2}} \,;\, +\infty\right[$$

2. a.
- On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto 0^+} -\ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \mapsto 0^+} 2 \cdot (\ln x)^2 = +\infty$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x \mapsto 0^+} f(x) = +\infty$$

- On a la transformation algébrique suivante :

$$f(x) = -3 - \ln x + 2 \cdot (\ln x)^2$$

$$= -3 + \ln x \cdot (2 \cdot \ln x - 1)$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \mapsto +\infty} 2 \cdot \ln x - 1 = +\infty$$

On en déduit la limite du produit :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \ln x \cdot (2 \cdot \ln x - 1) = +\infty$$

La fonction f admet la limite : $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$

b. Notons u la fonction définie par :

$$u(x) = \ln x \quad ; \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

La fonction f admet pour expression :

$$f(x) = -3 - u(x) + 2 \cdot \left[u(x)\right]^2$$

La dérivée f' admet pour expression :

$$f'(x) = 0 - u'(x) + 2 \cdot \left[2 \cdot u'(x) \cdot u(x)\right]$$

$$= 0 - \frac{1}{x} + 2 \times 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x = -\frac{1}{x} + \frac{4 \cdot \ln x}{x} = \frac{4 \cdot \ln x - 1}{x}$$

c. Sur $\left]0 \,;\, +\infty\right[$, le dénominateur de la fonction f' est strictement positif ; ainsi, le signe de f' ne dépend que de son numérateur. Résolvons l'équation suivante :

$$4 \cdot \ln x - 1 > 0$$

$$\ln x > \frac{1}{4}$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$e^{\ln x} > e^{\frac{1}{4}}$$

$$x > e^{\frac{1}{4}}$$

On en déduit que :

- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{4}}\,;+\infty\right[$;
- la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\,;e^{\frac{1}{4}}\right]$.

L'image de $e^{\frac{1}{4}}$ par la fonction f a pour valeur :

$$f\left(e^{\frac{1}{4}}\right) = -3 - \ln\left(e^{\frac{1}{4}}\right) + 2\cdot\left(\ln e^{\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$= -3 - \frac{1}{4} + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = -3 - \frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{16}$$

$$= -3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{-24-2+1}{8} = -\frac{25}{8}$$

On a le tableau de variations suivant :

x	0	$e^{\frac{1}{4}}$	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	$-\frac{25}{8}$	↗ $+\infty$

3. Pour déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$, déterminons les deux valeurs suivantes :

- L'image de $e^{\frac{5}{4}}$ par la fonction f a pour valeur :

$$f\left(e^{\frac{5}{4}}\right) = -3 - \ln\left(e^{\frac{5}{4}}\right) + 2\cdot\left[\ln\left(e^{\frac{5}{4}}\right)\right]^2$$

$$= -3 - \frac{5}{4} + 2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2 = -3 - \frac{5}{4} + 2\times\frac{25}{16}$$

$$= -3 - \frac{5}{4} + \frac{25}{8} = \frac{-24-10+25}{8} = -\frac{9}{8}$$

- La fonction f admet pour nombre dérivée en $e^{\frac{5}{4}}$:

$$f'\left(e^{\frac{5}{4}}\right) = \frac{4\cdot\ln\left(e^{\frac{5}{4}}\right)-1}{e^{\frac{5}{4}}} = \left(4\times\frac{5}{4}-1\right)\cdot e^{-\frac{5}{4}} = 4\cdot e^{-\frac{5}{4}}$$

Ainsi, la tangente $(\mathscr{T})$ admet équation :

$$y = f'\left(e^{-\frac{5}{4}}\right)\cdot\left(x - e^{\frac{5}{4}}\right) + f\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$$

$$y = 4\cdot e^{-\frac{5}{4}}\cdot\left(x - e^{\frac{5}{4}}\right) - \frac{9}{8}$$

$$y = 4\cdot e^{-\frac{5}{4}}\cdot x - 4\cdot e^{-\frac{5}{4}}\cdot e^{\frac{5}{4}} - \frac{9}{8}$$

$$y = 4\cdot e^{-\frac{5}{4}}\cdot x - 4\cdot e^{-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}} - \frac{9}{8}$$

$$y = 4\cdot e^{-\frac{5}{4}}\cdot x - 4 - \frac{9}{8}$$

$$y = 4\cdot e^{-\frac{5}{4}}\cdot x - \frac{41}{8}$$

4. a. La dérivée de la fonction φ a pour expression :

$$\varphi'(x) = f'(x) - 4\cdot e^{-\frac{5}{4}} = \frac{4\cdot\ln x - 1}{x} - 4\cdot e^{-\frac{5}{4}}$$

Ainsi, la fonction φ' admet pour expression :

$$\varphi'(x) = \frac{u(x)}{v(x)} - 4\cdot e^{-\frac{5}{4}}$$

où les fonctions u et v sont définies par :

$$u(x) = 4\cdot\ln x - 1 \quad ; \quad v(x) = x$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 4\times\frac{1}{x} - 0 = \frac{4}{x} \quad ; \quad v'(x) = 1$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction φ'' :

$$\varphi''(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} - 0$$

$$= \frac{\frac{4}{x}\cdot x - (4\cdot\ln x - 1)\cdot 1}{x^2} = \frac{4 - 4\cdot\ln x + 1}{x^2} = \frac{5 - 4\cdot\ln x}{x^2}$$

b. Le quotient a un dénominateur strictement positif ; ainsi, le signe de $\varphi''(x)$ ne dépend que du signe du numérateur :

$5 - 4\cdot\ln x > 0$	$\ln x < \frac{5}{4}$
$-4\cdot\ln x > -5$	$e^{\ln x} < e^{\frac{5}{4}}$
$\ln x < \frac{-5}{-4}$	$x < e^{\frac{5}{4}}$

On en déduit que :

- φ' est strictement croissante sur $\left]0\,;\frac{5}{4}\right[$;
- φ' est strictement décroissante sur $\left]\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$.

Ainsi, la fonction φ' admet un maximum en $\frac{5}{4}$ et ce maximum a pour valeur :

$$\varphi'\left(e^{\frac{5}{4}}\right) = \frac{4\cdot\ln\left(e^{\frac{5}{4}}\right)-1}{e^{\frac{5}{4}}} - 4\cdot e^{-\frac{5}{4}} = \frac{4\times\frac{5}{4}-1}{e^{\frac{5}{4}}} - 4\cdot e^{-\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{4}{e^{\frac{5}{4}}} - 4\cdot e^{-\frac{5}{4}} = 4\cdot e^{-\frac{5}{4}} - 4\cdot e^{-\frac{5}{4}} = 0$$

Le maximun de la fonction φ' étant nul, on en déduit que la fonction φ' est négarive sur $\left[0\,;+\infty\right[$:

$$\varphi'(x) \leqslant 0 \quad \text{pour tout } x \in \left[0\,;+\infty\right[$$

c. On a l'image suivante :

$$\varphi\left(e^{\frac{5}{4}}\right) = \left[-3-\ln\left(e^{\frac{5}{4}}\right)+2\cdot\left[\ln\left(e^{\frac{5}{4}}\right)\right]^2\right] - \left(4\cdot e^{-\frac{5}{4}}\cdot e^{\frac{5}{4}} - \frac{41}{8}\right)$$

$$= -3 - \frac{5}{4} + 2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(4\cdot e^0 - \frac{41}{8}\right) = -3 - \frac{5}{4} + \frac{25}{8} + \frac{9}{8}$$

$$= \frac{-24-10+25+9}{8} = 0$$

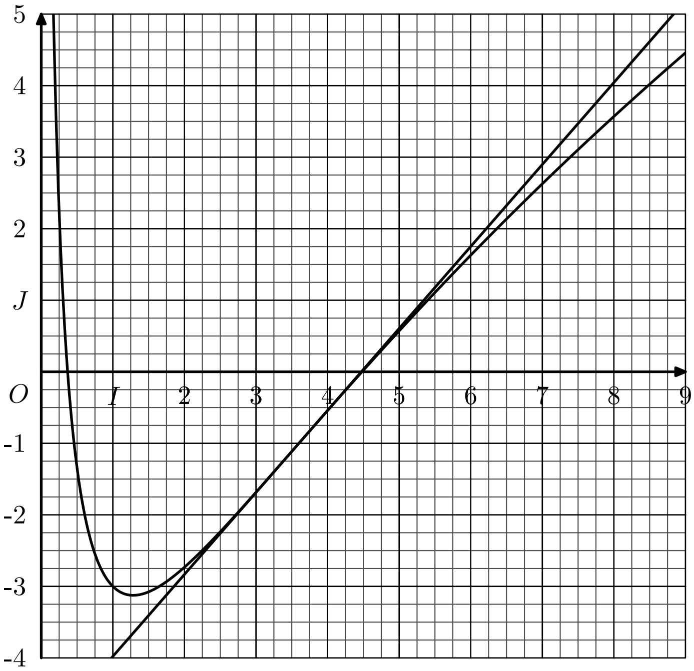
La question b. permet d'affirmer que la fonction φ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	0		$e^{\frac{5}{4}}$		$+\infty$
$\varphi(x)$	‖	$+$	0	$-$	

On en déduit que :

- la courbe $\mathscr{C}$ se situe au dessus de la tangente $\mathscr{T}$ sur l'intervalle $\left]0\,;e^{\frac{5}{4}}\right[$;
- la courbe $\mathscr{C}$ se situe en dessous de la tangente $\mathscr{T}$ sur l'intervalle $\left]e^{\frac{5}{4}}\,;+\infty\right[$.

5. Voici le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente $\mathscr{T}$:



Correction 7

1. a. On a la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto} x\cdot e^x = +\infty$.

On en déduit la limite de la fonction f :

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\cdot e^x - 1 = +\infty$

L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :

$f(x) = u(x)\cdot v(x) - 1$

où les fonctions u et v sont définies par :

$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = e^x$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = e^x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + 0$$
$$= 1\cdot e^x + x\cdot e^x = e^x\cdot\big(1+x\big)$$

Le facteur e^x étant strictement positif, le signe de la fonction f' ne dépend que du facteur $1+x$ qui est positif sur $\big[0\,;+\infty\big[$. La fonction f' est donc positive sur $\big[0\,;+\infty\big[$: on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b. On a les deux limites :

$f(0) = -1 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$

De plus :

- la fonction f est continue sur $\big[0\,;+\infty\big[$
- la fonction f est strictement croissante sur $\big[0\,;+\infty\big[$
- le nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de son ensemble de définition

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'un unique nombre α vérifiant solution de l'équation :

$f(\alpha) = 0$

A l'aide de la calculatrice, on obtient la valeur approchée de cette valeur :

$\alpha \approx 0{,}57$

c. Ainsi, la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	0	α	$+\infty$
Variation de f	-1 ↗	0	↗ $+\infty$

Ce tableau de variations permet de donner le tableau de signes suivant de la fonction f :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. a. La longueur MN s'exprime en fonction de x par :
$MN = e^x - \ln x$

Notons g la fonction définie par :

$g(x) = e^x - \ln x$

Cette fonction admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :

$$g'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{x\cdot e^x - 1}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

Ainsi, sur $\big[0\,;+\infty\big[$, le dénominateur est positif. On en déduit le tableau de signes de la fonction g' :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, la fonction g admet le tableau de variations suivant :

x	0	α	$+\infty$
Variation de g	↘		↗

On en déduit que la longueur MN admet un minimum pour $x = \alpha$. La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée de la longueur minimale de MN :

$MN \approx 2{,}33$

b. Le nombre α est solution de l'équation :

$$f(\alpha) = 0$$
$$\alpha\cdot e^\alpha - 1 = 0$$
$$\alpha\cdot e^\alpha = 1$$
$$e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

Déterminons les équations des deux tangentes :

- La fonction exponentielle admet pour dérivée elle-même. Le nombre dérivée de la fonction exponentielle en α a pour valeur e^α.

  La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction exponentielle au point d'abcisse α a pour coefficient directeur e^α.

- La fonction logarithme admet pour dérivée la fonction inverse. Le nombre dérivée de la fonction logarithme en α a pour valeur $\dfrac{1}{\alpha}$.

  La tangente à la courbe Γ au point d'abcisse α a pour coefficient directe $\dfrac{1}{\alpha}$

De l'égalité précédente, on en déduit que ces deux tangentes ont le même coefficient directeur.

Les tangentes au point d'abscisse α aux courbes $\mathscr{C}$ et

Γ sont parallèles.

Correction 8

1. On remarque que la fonction g s'annule en 1 :
$g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$

Nous allons étudier le sens de variation de la fonction g. Pour cela, déterminons l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :
$$g'(x) = 2x - 0 + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$
Sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$, le numérateur et le dénominateur sont tous deux strictement positifs, on en déduit que la fonction g' est strictement positive sur $\big[1\,;+\infty\big[$.

On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$.
On a les limites suivantes aux bornes de son ensemble de définition :

- $g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$
- On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2 - 1 = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln x = +\infty$
On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2 - 1 + \ln(x) = +\infty$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	1	$+\infty$
Variation de g	0	$\nearrow$ $+\infty$

D'après le tableau de variations, la fonction g admet pour minimum 0 pour $x=1$. On en déduit que la fonction g est positive sur $\big[1\,;+\infty\big[$.

2. a. En considérant les deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = \ln(x) \quad ; \quad v(x) = x$
qui admmettent pour dérivée :
$u'(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad v'(x) = 1$
On peut écrire l'expression de la fonction f sous la forme :
$$f(x) = x - \frac{u(x)}{v(x)}$$
La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$$f'(x) = 1 - \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= 1 - \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = 1 - \frac{1 - (\ln x)\cdot 1}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 - \big(1 - \ln x\big)}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. La fonction g étant positive sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$, on en déduit que la fonction f' est positive sur cet intervalle.

On en déduit que la fonction f est croissante sur $\big[1\,;+\infty\big[$.

Correction 9

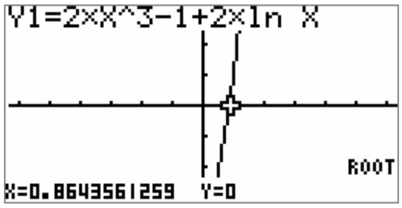
Partie A

1. La fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :
$$g'(x) = 2\cdot(3x^2) - 0 + 2\times\frac{1}{x} = 6x^2 + \frac{2}{x}$$
Les deux termes de cette somme étant positifs, on en déduit que la fonction g' est positive sur $\big]0\,;+\infty\big[$.

2. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} g(x) = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = +\infty$
De plus :
- la fonction g est continue sur $\big]0\,;+\infty\big[$
- la fonction g est strictement croissante sur $\big]0\,;+\infty\big[$
- le nombre 0 est compris entre les images des bornes de l'intervalle $\big]0\,;+\infty\big[$ par la fonction g.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique nombre $\alpha\in\big]0\,;+\infty\big[$ vérifiant :
$g(\alpha) = 0$

A l'aide de la calculatrice, on obtient la capture d'écran suivante :



Le nombre α a pour valeur approchée : $\alpha\approx 0{,}86$

3. Ainsi, la fonction g est strictement croissante sur $\big]0\,;+\infty\big[$ et s'annule en α. On obtient le tableau de signes suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

Partie B

1. - Déterminons la limite de la fonction f en 0^+ :
On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} 2x = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$
On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} 2x - \frac{\ln x}{x^2} = +\infty$
- Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$:
D'après le cours, on a la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$
De la limite $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2x = +\infty$, on en déduit la limite :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$

2. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$$f(x) = 2x - \frac{u(x)}{v(x)}$$
Où les fonctions u et v sont définies par :
$u(x) = \ln x \quad ; \quad v(x) = x^2$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad v'(x) = 2x$
La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

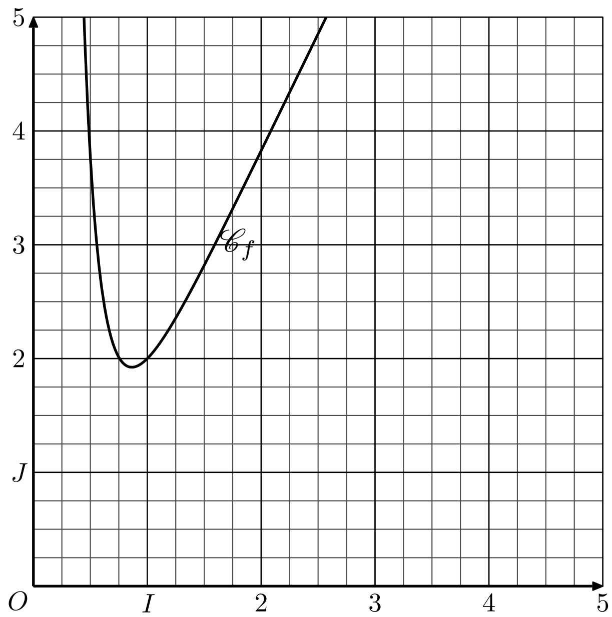
$$f'(x) = 2 - \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= 2 - \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln(x)\cdot(2x)}{\left(x^2\right)^2} = 2 - \frac{x - 2x\cdot\ln(x)}{x^4}$$
$$= 2 - \frac{x\cdot\big[1 - 2\ln(x)\big]}{x^4} = 2 - \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$
$$= \frac{2x^3 - (1 - 2\ln x)}{x^3} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

Sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$, le dénominateur du quotient de f' est strictement positif : f' a le même signe que son numérateur.
La fonction f' a le même signe que la fonction g.

3. On en déduit le tableau de signes de la fonction f' puis le tableau de variations de la fonction f :

x	0		α		$+\infty$
Signe de f'	‖	-	0	+	
Variation de f	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4. Voici la représentation de la fonction f :



Correction 10

1. a. Déterminons les deux limites :
- On a les deux limites :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$$
On en déduit la limite :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} x\cdot\mathrm{e}^{-x} = -\infty$$
- On a la transformation suivante :
$$f_1(x) = -(-x)\cdot\mathrm{e}^{-x}$$
Par le changement de variable $X = -x$, on a :
$$f_1(x) = -X\cdot\mathrm{e}^{X}$$
Or, quand x tend vers $+\infty$, la variable X tend vers $-\infty$. On a la limite suivante :
$$\lim_{X\mapsto-\infty} -X\cdot\mathrm{e}^{X} = 0^+$$
On en déduit la limite : $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$

b. La fonction f_1 est définie par le produit des fonctions u et v définies par :
$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{-x}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$$f_1'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= 1\cdot\mathrm{e}^{-x} + x\cdot\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x} - x\cdot\mathrm{e}^{-x}$$
$$= \mathrm{e}^{-x}\cdot\left(1 - x\right)$$
La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le signe de f_1' ne dépend que du facteur $(1-x)$.
On en déduire le tableau de signes de la fonction f_1', puis le tableau de variations de la fonction f_1 :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de f_1'		+	0	-	
Variation de f_1	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

c. k est défini comme un entier supérieur ou égal à 1 et la courbe $\mathscr{C}_k$ ne vérifie pas le tableau de variations de la fonction f_1 : k ne peut valoir 1.
On en déduit que k est un entier strictement supérieur à 1 : k est un entier supérieur ou égal à 2.

2. a. Montrons que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passe par les points $(0\,;0)$ et $(1\,;\mathrm{e}^{-1})$:
- $f_n(0) = 0^n\times\mathrm{e}^{-0} = 0\times1 = 0$
- $f_n(1) = 1^n\times\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}$.

b. La fonction f_n est définie par le produit des fonctions u et v définies par les expressions :
$u(x) = x^n \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{-x}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = n\cdot x^{n-1} \quad ; \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f_n' :
$$f_n'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = n\cdot x^{n-1}\cdot\mathrm{e}^{-x} + x^n\cdot\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$
$$= n\cdot x^{n-1}\cdot\mathrm{e}^{-x} - x^n\cdot\mathrm{e}^{-x} = x^{n-1}\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot(n-x)$$

3. D'après la question 2. b., la fonction f_3' admet l'expression :
$$f_3'(x) = x^2\cdot(3-x)\cdot\mathrm{e}^{-x}$$
Les facteurs x^2 et e^{-x} étant positif sur $\mathbb{R}$, on en déduit que le signe de la fonction f_3' dépend du signe de $3-x$.
On obtient le tableau de signes de la fonction f_3', puis le tableau de variations de la fonction f_3 :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de f_3'		$+$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f_3		↗		↗		↘	

La fonction f_3 admet un maximum atteint pour $x=3$.

4. a. D'après la question 1. c., on a $k \geqslant 2$. La droite T_k est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse 1. Son expression réduite est donnée par l'expression :

$$y = f_k'(1)\cdot(x-1) + f_k(1)$$
$$y = 1^{k-1}\cdot(k-1)\cdot\text{e}^{-1}\cdot(x-1) + 1^k\cdot\text{e}^{-1}$$
$$y = (k-1)\cdot\text{e}^{-1}\cdot(x-1) + \text{e}^{-1}$$
$$y = (k-1)\cdot\text{e}^{-1}\cdot x - (k-1)\cdot\text{e}^{-1} + \text{e}^{-1}$$
$$y = (k-1)\cdot\text{e}^{-1}\cdot x + (1-k)\cdot\text{e}^{-1} + \text{e}^{-1}$$
$$y = (k-1)\cdot\text{e}^{-1}\cdot x + (2-k)\cdot\text{e}^{-1}$$

Déterminons l'antécédente du nombre 0 par l'équation réduite de la tangente T_k :

$$f_k(x) = 0$$
$$(k-1)\cdot\text{e}^{-1}\cdot x + (2-k)\cdot\text{e}^{-1} = 0$$
$$(k-1)\cdot\text{e}^{-1}\cdot x = (k-2)\cdot\text{e}^{-1}$$
$$x = \frac{(k-2)\cdot\text{e}^{-1}}{(k-1)\cdot\text{e}^{-1}}$$
$$x = \frac{k-2}{k-1}$$

Ainsi, la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}\,;0\right)$.

b. Il est dit que la droite T_k intercepte l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{4}{5}\,;0\right)$. Par identification des écritures de l'abscisse de ce point d'intersection, on obtient l'égalité :

$$\frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$4(k-1) = 5(k-2)$$
$$4k - 4 = 5k - 10$$
$$-k = -6$$
$$k = 6$$

On en déduit que c'est la courbe $\mathscr{C}_6$ qui est représenté dans le graphique.

Correction 11

Partie A

Soit k un entier naturel quelconque. On considère la fonction f_k dont l'expression est donnée sous la forme :

$$f_k(x) = u(x)\cdot v(x) + x$$

où les fonctions u et v sont définies par :

$$u(x) = x + k \quad ; \quad v(x) = \text{e}^x$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \text{e}^x$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f_k' :

$$f_k'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + 1 = 1\cdot\text{e}^x + (x+k)\cdot\text{e}^x + 1$$
$$= \text{e}^x + (x+k)\cdot\text{e}^x + 1 = (x+k+1)\cdot\text{e}^x + 1$$

La droite (d) est la tangente au point d'abscisse -2 et son coefficient directenr a pour valeur 1 :

$$f_k'(-2) = 1$$
$$(-2+k+1)\cdot\text{e}^{-2} + 1 = 1$$
$$(-1+k)\cdot\text{e}^{-2} = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. La fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit l'équation :

$$-1 + k = 0$$
$$k = 1$$

Ainsi, seul la fonction f_1 admet 1 comme nombre dérivée en -2. Déterminons l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse -2 :

$$y = f_1'(-2)\big[x - (-2)\big] + f(-2)$$
$$y = 1\cdot(x+2) + (-2+1)\cdot\text{e}^{-2} + (-2)$$
$$y = x + 2 - \text{e}^{-2} - 2$$
$$y = x - \text{e}^{-2}$$

La courbe $\mathscr{C}_1$ admet la droite (d) comme tangente au point d'abscisse -2.

Partie B

1. a. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme :

$$g(x) = u(x)\cdot v(x) + \text{e}^{-2}$$

où les fonctions u et v sont définies par :

$$u(x) = x + 1 \quad ; \quad v(x) = \text{e}^x$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \text{e}^x$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :

$$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + 0$$
$$= 1\cdot\text{e}^x + (x+1)\cdot\text{e}^x = (x+2)\cdot\text{e}^x$$

b. La fonction exponentielle étant strictement positive, on obtient le tableau de signes de la fonction g' :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	

La fonction g admet les valeurs suivantes :

- $g(-2) = (-2+1)\cdot\text{e}^{-2} + \text{e}^{-2} = -\text{e}^{-2} + \text{e}^{-2} = 0$
- On a les deux limites suivantes :
  $$\lim_{x\mapsto+\infty} x + 1 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} \text{e}^x = +\infty$$
  On en déduit la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = +\infty$
- On a le développement suivant :
  $$g(x) = x\cdot\text{e}^x + \text{e}^x + \text{e}^{-2}$$
  On a les deux limites :
  $$\lim_{x\mapsto-\infty} x\cdot\text{e}^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} \text{e}^x = 0$$
  On en déduit la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x) = \text{e}^{-2}$

La fonction g admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Variation de g	e^{-2} ↘	0	↗ $+\infty$

2. Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_1$ et de la droite (d), étudions la différence suivante :
$f_1(x) - \left(x - e^{-2}\right) = (x+1)\cdot e^x + x - x + e^{-2}$
$= (x+1)\cdot e^x + e^{-2} = g(x)$

Du tableau de signes de la fonction g, on en déduit que :

$$g(x) \geqslant 0$$
$$f_1(x) - \left(x - e^{-2}\right) \geqslant 0$$
$$f_1(x) \geqslant x - e^{-2}$$

La courbe $\mathscr{C}_1$ représentative de la fonction f_1 se situe au dessus de sa tangente (d).

Correction 12

1. a. • Pour déterminons le sens de variation de la fonction g sur $[1\,;+\infty[$. Pour cela, déterminons l'expression de la dérivée de la fonction g est :

$$g'(x) = \frac{2}{2\cdot x} + 0 - 1 = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

Il est facile de voir que, sur $[1\,;+\infty[$, le numérateur est négatif et le dénominateur est positif. Ainsi, la dérivée de la fonction g est strictement négative sur $[1\,;+\infty[$.

On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

• ⇨ L'image de 1 a pour valeur :
$g(1) = \ln(2) + 1 - 1 = \ln 2$

⇨ Puisque $x>0$, on a la transformation algébrique suivante :

$$g(x) = \ln(2\cdot x) + 1 - x = 2x\cdot\left(\frac{\ln(2\cdot x)}{2\cdot x} + \frac{1}{2\cdot x} - \frac{x}{2\cdot x}\right)$$
$$= 2x\cdot\left(\frac{\ln(2\cdot x)}{2\cdot x} + \frac{1}{2\cdot x} - \frac{1}{2}\right)$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} 2\cdot x = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{\ln(2\cdot x)}{2\cdot x} + \frac{1}{2\cdot x} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

On en déduit la limite : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = -\infty$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	1	$+\infty$
Variation de g	$\ln 2$ ↘	$-\infty$

• On a les deux limites :
$g(1) = \ln 2 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = -\infty$

De plus :

⇨ la fonction g est continue sur $[1\,;+\infty[$

⇨ la fonction g est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$

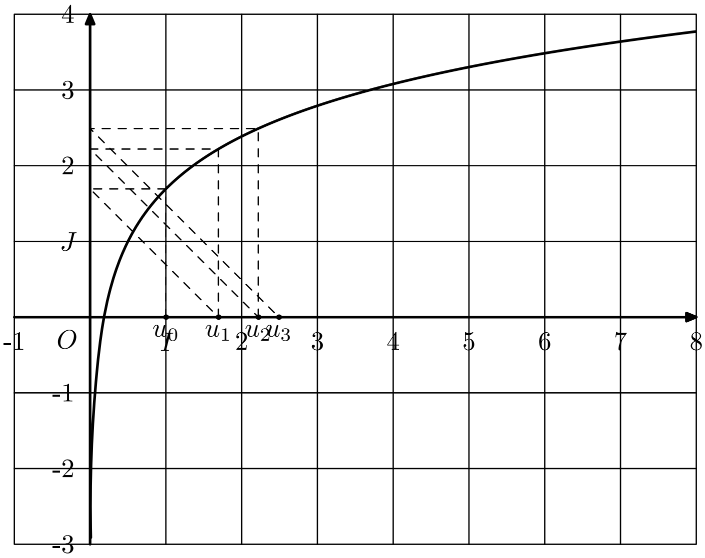
⇨ le nombre 0 est compris entre les images aux bornes de l'intervalle $[1\,;+\infty[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on a l'existence d'un unique nombre α vérifiant l'égalité : $g(\alpha)=0$

b. La valeur α vérifie :

$$g(\alpha) = 0$$
$$\ln\left(2\cdot\alpha\right) + 1 - \alpha = 0$$
$$\ln\left(2\cdot\alpha\right) + 1 = \alpha$$

2. a. Voici la représentation des quatre premiers termes de la suite (u_n) :



b. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
$\mathcal{P}_n$: "$1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

• **Initialisation :**
Pour $n=0$, on a :
⇨ $u_0 = 1 \geqslant 1$
⇨ $u_1 = \ln(2\cdot u_0) + 1 = \ln 2 + 1 = \ln 2 + 1 \leqslant 3$
On a donc l'encadrement suivant :
$1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$
Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on l'hypothèse de récurrence :
$1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$
La fonction $x \longmapsto \ln(2\cdot x)+1$ admet pour dérivée la fonction dont l'expression est :

$$x \longmapsto \frac{2}{2\cdot x} + 0 = \frac{1}{x}$$

Cette dérivée est strictement positive sur $[1\,;+\infty[$. Ainsi, la fonction $x \longmapsto \ln(2\cdot x)+1$ est strictement croissante.

La propriété supposée pour la récurrence, permet d'écrire l'encadrement suivant :

$$1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$$

La fonction $x \mapsto \ln(2 \cdot x)+1$ est croissante :

$$\ln(2)+1 \leqslant \ln(2 \cdot u_n)+1 \leqslant \ln(2 \cdot u_{n+1})+1 \leqslant \ln(2\times3)+1$$

$$\ln(2)+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \ln(2\times3)+1$$

$$1 \leqslant \ln(2)+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \ln(2\times3)+1 \leqslant 3$$

On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ s'initialise au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

c. De l'inégalité : $u_n \leqslant u_{n+1}$
On en déduit que la suite (u_n) est croissante.
De l'inégalité : $u_n \leqslant 3$
On en déduit que la suite u_n est majorée par 3

D'après le théorème de convergence des suites monotones et bornées, la suite (u_n) converge

Notons ℓ cette limite. De la définition de la suite (u_n), on a :

$$u_{n+1} = \ln(2 \cdot u_n) + 1$$

Par passage à la limite, on a :

$$\ell = \ln(2 \cdot \ell) + 1$$

On en déduit que le nombre ℓ vérifie la relation $g(\ell) = 0$. Or, d'après la question 1., il existe un seul nombre α vérifiant cette relation. On en déduit :
$\alpha = \ell$.
La suite (u_n) converge vers α.

Correction 13

Partie A

1. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' qui admet pour expression :
$$f'(x) = 1 + \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

Etudions l'inégalité suivante :

$$f'(x) > 0$$
$$1 - \mathrm{e}^{-x} > 0$$
$$-\mathrm{e}^{-x} > -1$$
$$\mathrm{e}^{-x} < 1$$

La fonction logarithme est strictement croissante :

$$\ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) < \ln 1$$
$$-x < 0$$
$$x > 0$$

On en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $\left[0\,;+\infty\right[$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

2. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$

On en déduit la limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto\infty} x + \mathrm{e}^{-x} = +\infty$$

Partie B

1. Soit g la fonction définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
$$g(x) = x - \ln(1+x)$$

Cette fonction admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Or, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, le numérateur et le dénominateur de ce quotient sont positifs : la fonction g' est strictement positive sur $\left[0\,;+\infty\right[$.
On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.

En remarquant que $g(0)=0$, on en déduit que la fonction g admet pour minimum la valeur 0 : g est minorée par la valeur 0 :

$$g(x) \geqslant 0$$
$$x - \ln(1+x) \geqslant 0$$
$$-\ln(1+x) \geqslant -x$$
$$\ln(1+x) \leqslant x$$

2. Soit n un entier naturel non-nul, on a les transformations algébriques suivantes :
$$\ln(n+1) = \ln\left(n \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

D'après l'inégalité précédemment établie :

$$\leqslant \ln n + \frac{1}{n}$$

3. On a :
$$f\left[\ln(n)\right] = \ln(n) + \mathrm{e}^{-\ln(n)} = \ln(n) + \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(n)}} = \ln(n) + \frac{1}{n}$$

4. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n non-nul par la relation :
$\mathcal{P}_n$: "$\ln(n) \leqslant u_n$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n non-nul.

- **Initialisation :**
  Pour $n=1$, on a : $\ln(1) = 0$; $u_1 = 0$
  On vient d'établir l'inégalité : $\ln 1 \leqslant u_1$
  La propriété $\mathcal{P}_1$.

- **Hérédité :**
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
  $\ln(n) \leqslant u_n$
  Ainsi, pour cette valeur de n, on suppose vérifier la propriété :
  $$\ln n \leqslant u_n$$
  D'après la partie **A**, la fonction f est strictement croissante :
  $$f\left[\ln(n)\right] \leqslant f\left(u_n\right)$$
  $$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant u_{n+1}$$
  D'après la question 1. :
  $$\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant u_{n+1}$$
  $$\ln(n+1) \leqslant u_{n+1}$$
  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**
  La propriété a été initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. On vient de montrer, à l'aide

d'un raisonnement par récurrence, que la propriété est vraie pour tout entier naturel non-nul.

5. On a la limite : $\lim_{n\mapsto+\infty} \ln(n) = +\infty$
Par la comparaison, $\ln(n) \leqslant u_n$ vérifiée pour tout entier naturel non-nul, on en déduit la limite suivante :
$\lim_{x\mapsto+\infty} u_n = +\infty$

Correction 14

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
$\mathcal{P}_n$: "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
On a $u_0 = 1$, donc : $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$
La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$0 \leqslant u_n \leqslant 1$
On a l'encadrement :
$$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$
La fonction f est croissante :
$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$$
$$0 - \ln(1) \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 - \ln(2)$$
On a la valeur approchée $1 - \ln(2) \approx 0{,}31$:
$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 - \ln(2) \leqslant 1$$
$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \leqslant 1$$
On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.
- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée.

2. De la définition des termes de la suite (u_n), on a :
$$u_{n+1} = u_n - \ln\left({u_n}^2+1\right)$$
$$u_{n+1} - u_n = -\ln\left({u_n}^2+1\right)$$
De la question précédente, on a l'encadrement suivante pour tout entier naturel n :
$$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$
La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$:
$$0^2 \leqslant {u_n}^2 \leqslant 1^2$$
$$0 \leqslant {u_n}^2 \leqslant 1$$
$$1 \leqslant {u_n}^2 + 1 \leqslant 2$$
La fonction logarithme est croissante :
$$\ln 1 \leqslant \ln\left({u_n}^2+1\right) \leqslant \ln 2$$
$$0 \leqslant \ln\left({u_n}^2+1\right) \leqslant \ln 2$$
$$0 \geqslant -\ln\left({u_n}^2+1\right) \geqslant -\ln 2$$
$$-\ln 2 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$
On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

4. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie la relation :
$$f(\ell) = \ell$$
$$\ell - \ln\left(\ell^2+1\right) = \ell$$
$$-\ln\left(\ell^2+1\right) = 0$$
$$\ln\left(\ell^2+1\right) = 0$$
$$e^{\ln\left(\ell^2+1\right)} = e^0$$
$$\ell^2 + 1 = 1$$
$$\ell^2 = 0$$
$$\ell = 0$$
La suite (u_n) converge vers 0.

Correction 15

1. Le fait de gagner ou non ce jeu est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\dfrac{23}{180}$.
Le joueur répétant six fois ce jeu de manière indépendante, nous pouvons assimiler cette répétition à un schéma de Bernoulli de paramètre 6 et $\dfrac{23}{180}$
Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de succès réalisés sur ce schéma de Bernoulli. La variable $\mathcal{X}$ suit une loi de binomiale de paramètres 6 et $\dfrac{23}{180}$:
$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\left(6\,;\,\frac{23}{180}\right)$$
Ainsi, la probabilité de gagner exactement deux parties sur six répétitions s'obtient via la formule :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = \binom{6}{2} \times \left(\frac{23}{180}\right)^2 \times \left(\frac{157}{180}\right)^4 \approx 0{,}14$$

2. Soit n un entier naturel non-nul, notons $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et $\dfrac{23}{180}$. On recherche les valeurs de n satisfaisants l'inégalité suivante :

$$\mathcal{P}\big(\mathcal{Y}\geqslant 1\big) > 0{,}9$$
$$1-\mathcal{P}\big(\mathcal{Y}<1\big) > 0{,}9$$
$$1-\mathcal{P}\big(\mathcal{Y}=0\big) > 0{,}9$$
$$1-\binom{n}{0}\times\Big(\frac{23}{180}\Big)^0\times\Big(\frac{157}{180}\Big)^n > 0{,}9$$
$$1-\Big(\frac{157}{180}\Big)^n > 0{,}9$$
$$-\Big(\frac{157}{180}\Big)^n > 0{,}9-1$$
$$-\Big(\frac{157}{180}\Big)^n > -0{,}1$$
$$\Big(\frac{157}{180}\Big)^n < 0{,}1$$

La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\ln\Big[\Big(\frac{157}{180}\Big)^n\Big] < \ln(0{,}1)$$
$$n\cdot\ln\Big(\frac{157}{180}\Big) < \ln(0{,}1)$$
$$n\cdot\ln\Big(\frac{157}{180}\Big) < \ln(0{,}1)$$

Le nombre $\ln\big(\frac{157}{180}\big)$ étant strictement négatif :

$$n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\Big(\frac{157}{180}\Big)}$$

Or, de la valeur approchée $\frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{157}{180}\right)}\approx 16{,}8$, on a :

$$n \geqslant 17$$

Le joueur doit faire au minimun 17 parties pour que la probabliité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9.