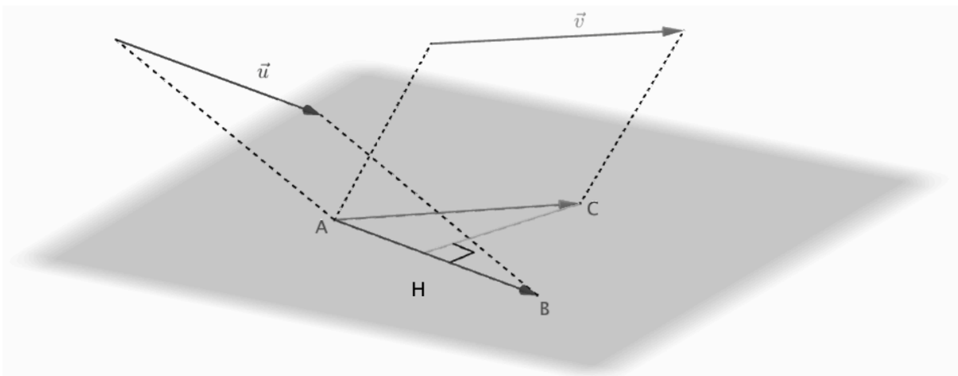
Produit scalaire dans l'espace

I Produit scalaire de 2 vecteurs

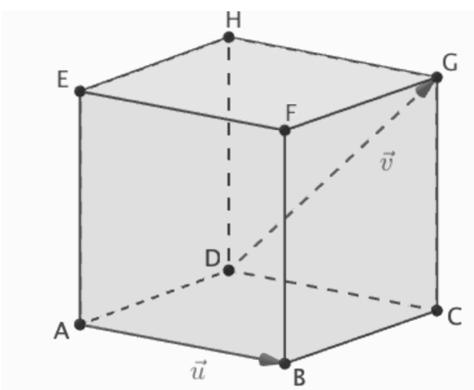
1) Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe une plan P contenant les points A, B et C.

Définition 1
On appelle ***produit scalaire de l'espace*** *de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ le produit $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan P*



Remarque
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = || \overrightarrow{u} || \times || \overrightarrow{v} || \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$



Exemple 1
Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête a.
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} =$

2) Propriétés

Les propriétés dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriété 1
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = || \overrightarrow{u} ||^2$
- Symétrie : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
- Bilinéarité : $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ et $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$
- Orthogonalité : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ orthogonaux (ou l'un des 2 vecteurs est nul)

3) identités remarquables

Propriété 2
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace, on a :
1) $|| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} ||^2 = || \overrightarrow{u} ||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + || \overrightarrow{v} ||^2$
2) $|| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} ||^2 = || \overrightarrow{u} ||^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + || \overrightarrow{v} ||^2$

4) Formules de polarisation

Propriété 3
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace, on a :
1) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(|| \overrightarrow{u} ||^2 + || \overrightarrow{v} ||^2 - || \overrightarrow{u-v} ||^2)$
2) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(|| \overrightarrow{u+v} ||^2 - || \overrightarrow{u} ||^2 - || \overrightarrow{v} ||^2)$

II Produit scalaire dans un repère orthonormé

1) Base et repère orthonormé

Définition 2
Une base $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ de l'espace est ***orthonormée*** *si :*
- Les vecteurs $\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$) sont orthogonaux deux à deux
- $|| \overrightarrow{i} || = 1$, $|| \overrightarrow{j} || = 1$ et $|| \overrightarrow{k} || = 1$

Définition 3
Un repère $(O; \overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ de l'espace est ***orthonormé*** *si la base $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ est orthonormée*

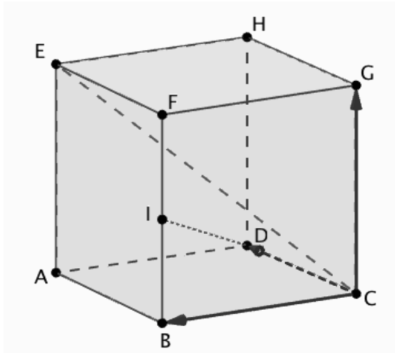
2) Expression analytique du produit scalaire

Propriété 4
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$.
Alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$. En particulier on a $|| \overrightarrow{u} || = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Démonstration

.

Exemple 2
En considérant le repère $(C; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CG})$ que peut on dire des vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$?

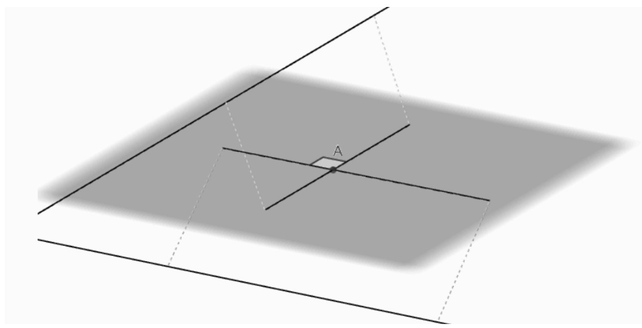


Propriété 5
Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace, on a :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

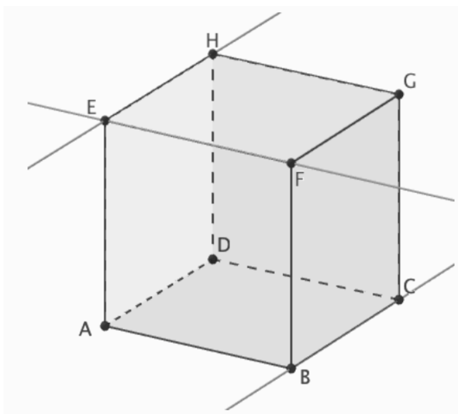
III Orthogonalité

1) Orthogonalité de 2 droites

Définition 4
Deux droites de l'espace dont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires



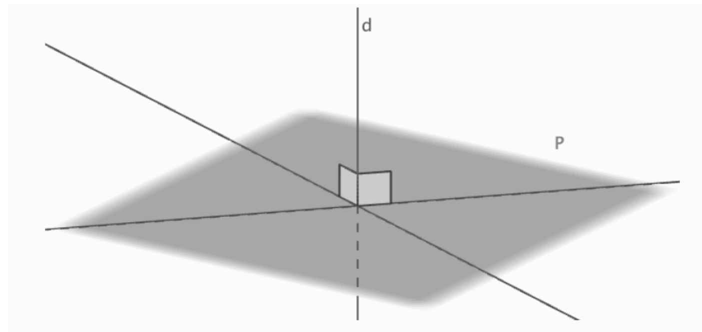
Exemple 3
ABCEDFGH est un cube.
Les droites (EH) et (EF) sont
Les droites (BC) et (EF) sont



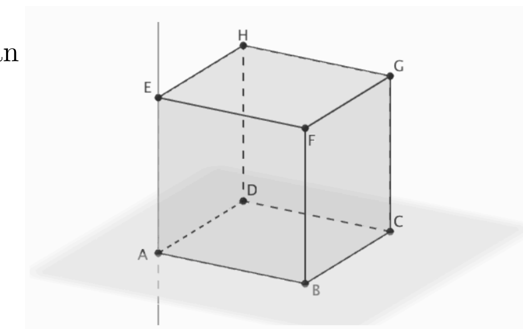
Remarque
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales (réciproque fausse)

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

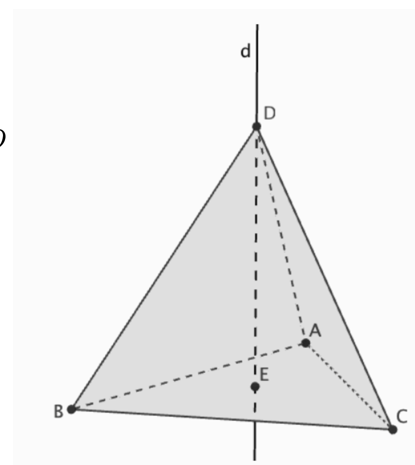
Propriété 6
Une droite (d) est orthogonale à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à 2 droites sécantes de P



Exemple 4
ABCDEFGH est un cube. Qu'en est il de la droite (AE) par rapport au plan (ABC) ?

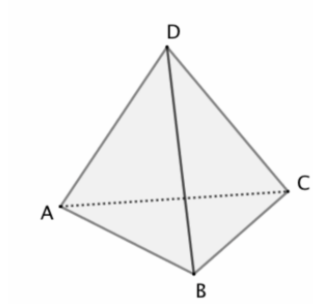


Exercice 1
ABC est un triangle equilatéral. E est le point d'intersection de ses médianes. La droite (d) passant par E est orthogonale au plan (ABC). La pyramide $ABCD$ est telle que D soit un point de la droite (d).
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales



.

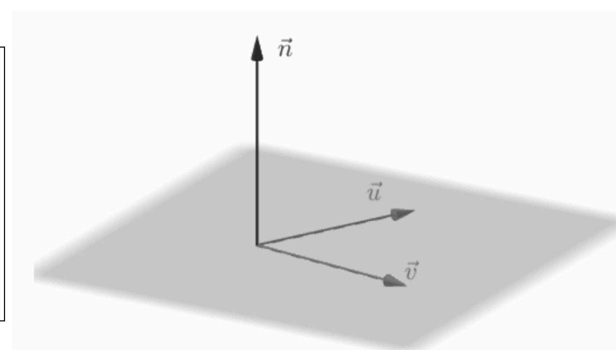
Exercice 2
Soit un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arêtes de longueur l. Démontrer que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales



IV Vecteur normal à un plan

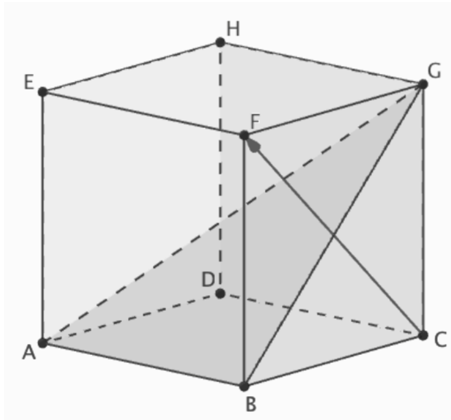
Définition 5
Un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ de l'espace est ***normal*** *à un plan P lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans P*

Propriété 7
- Soit A un point et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de l'espace. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ est un plan de l'espace
- Réciproquement, soit P un plan de l'espace. Pour tout point A de P et tout vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de P, P est l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$



Théorème 1
Un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ de l'espace est normal à un plan P s'il est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de P

Exercice 3
ABCEDFGH est un cube. Démontrer que $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG)

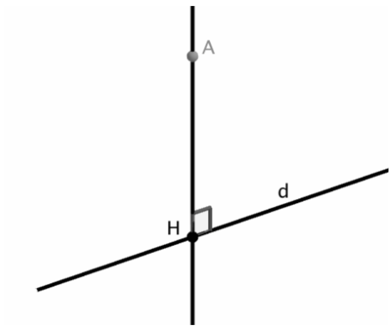


Exercice 4
Dans un repère orthonormé, soient 3 points $A(1;2;-2)$, $B(-1;3;1)$ et $C(2;0;-2)$.
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC)

V Projection orthogonale

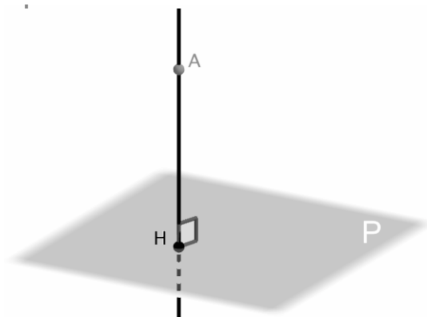
1) Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition 6
Soit A un point et (d) une droite de l'espace. La projection orthogonale de A sur (d) est le point H appartenant à (d) tel que (AH) soit perpendiculaire à (d)



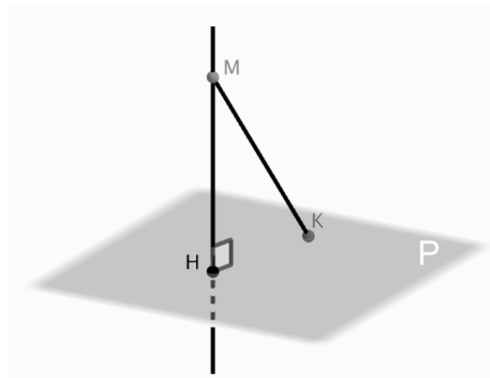
2) Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition 7
Soit A un point et P un plan de l'espace.
La projection orthogonale de A sur P est le point H appartenant à P tel que (AH) soit orthogonale au plan P



Propriété 8
Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point de P le plus proche de M

Démonstration
EXIGIBLE



Exercice 5
Soit ABCDEFGH un cube. En ce placant dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, calculer la distance du point G au plan (BDE)