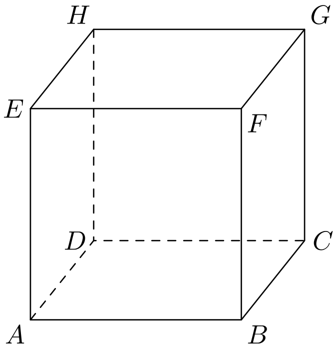
Exercices : Produit scalaire dans l'espace

Exercice 1

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :

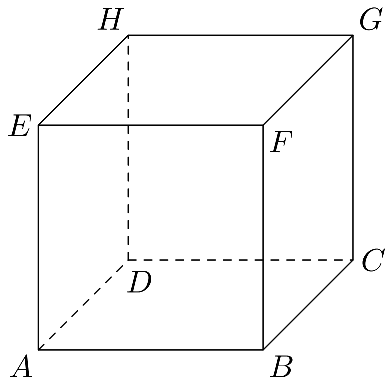


1. Justifier que les droites (EF) et (GC) sont orthogonales.
2. Justifier que les droites (AD) et (HF) ne sont pas orthogonales.
3. Les droites (AG) et (BG) sont-elles orthogonales?

Exercice 2

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté $5\,cm$ représenté ci-dessous :

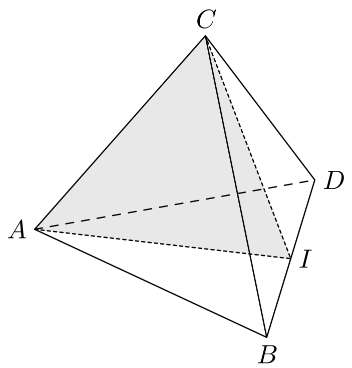
1. Montrer que le plan (ABC) est orthogonal à la droite (AE)
2. Calculer la longueur de la diagonale $[EC]$.



Exercice 3

La figure ci-contre représente un tétraèdre régulier $ABCD$ et I le milieu du segment $[BD]$.

Justifier que la droite (BD) est orthogonale au plan (AIC).



Exercice 4

On rappelle les deux formules où A et B sont deux points de l'espace et I est le milieu du segment $[AB]$:

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- $I\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2} ; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Dans l'espace muni d'un repère $(O ; I ; J ; K)$ orthonormé, on considère quatre points repérés par leurs coordonnées :

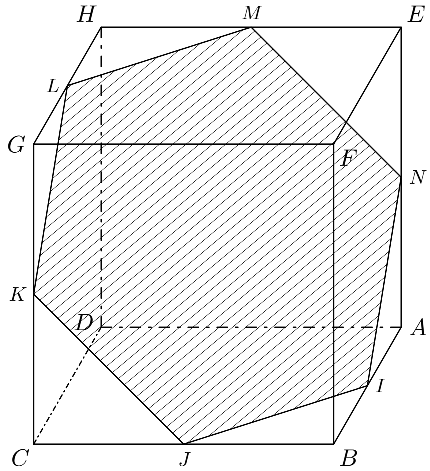
$$A(3 ; -1 ; 5) \quad ; \quad B(-2 ; 2 ; 3) \quad ; \quad C(-1 ; -2 ; 4) \quad ; \quad D\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 4\right)$$

1. Les points A, B, C sont-ils alignés?
2. Montrer que le triangle ABC est isocèle en C.
3. Justifier que le point D est le pied de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.

Exercice 5

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. On munit l'espace du repère $(C ; \overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{CG})$ orthonormal.

Les points I, J, K, L, M, N sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[EA]$.



1. Déterminer les coordonnées des points I, K et L.
2. a. Déterminer les coordonnées du point O milieu du segment $[IL]$.
   b. Déterminer les longueurs OK et KL.
3. On admet que le polygone $IJKLMN$ est un hexagone régulier. Ainsi, le point O est le centre de ce polygone.
   a. Donner la mesure de l'angle $\widehat{KOL}$.
   b. Déterminer l'aire du triangle KOL.

Exercice 6

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

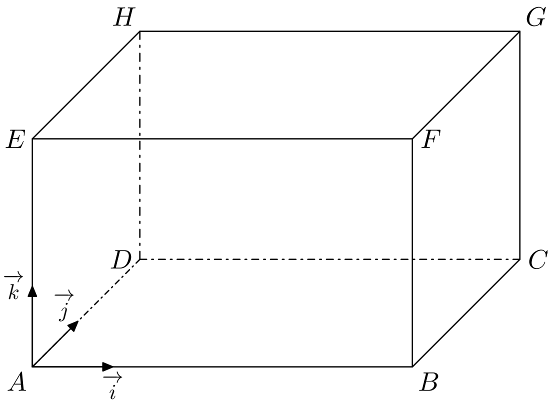
1. On considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}(1 ; 2 ; 3)$ et $\overrightarrow{v}(2 ; -1 ; 1)$, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.
2. On considère les deux vecteurs $\overrightarrow{w}(-2 ; 0 ; 1)$ et $\overrightarrow{t}(-1 ; 1 ; -1)$, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{t}$.

Exercice 7

Proposition : pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

- $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 \right)$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 \right)$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 \right)$

On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



On munit l'espace du repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ représenté ci-dessus. On a alors les mesures :

$AB = 10 \quad ; \quad AD = 5 \quad ; \quad AE = 4$

1. Déterminer les valeurs de $\|\overrightarrow{AC}\|$, $\|\overrightarrow{CG}\|$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CG}$.

2. En déduire la mesure de la diagonale $[AG]$.

Exercice 8

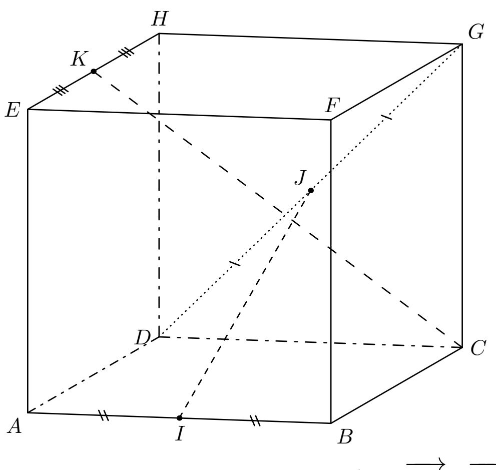
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points suivants :

$$A\,(6\,;5\,;1) \quad ; \quad B\,(-4\,;2\,;-4) \quad ; \quad C\,(4\,;7\,;2)$$

Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en C.

Exercice 9

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous et où les points I, J, K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[DG]$, $[EH]$.

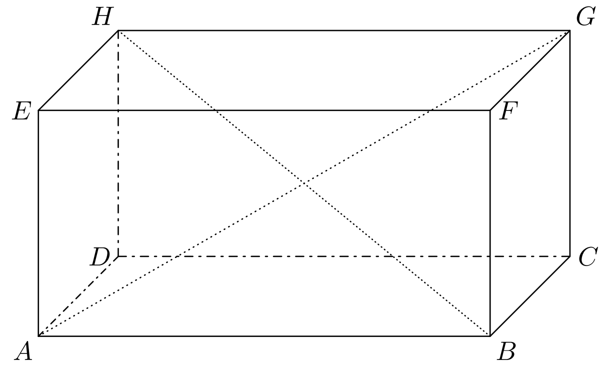


On considère l'espace muni du repère $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\right)$.
Montrer que les droites (IJ) et (CK) sont orthogonales.

Exercice 10

On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous où :

$AB = a \quad$ avec $a \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad AD = 1 \quad ; \quad AE = 1$



1. Justifier que les droites (HB) et (AG) sont coplanaires.

2. Déterminer la valeur de a afin que les droites (HB) et (AG) sont perpendiculaires.

Exercice 11

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé direct.
On considère les points :

$A(-2\,;0\,;1) \quad ; \quad B(1\,;2\,;-1) \quad ; \quad C(-2\,;2\,;2)$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.

2. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

3. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Exercice 12

Définition : soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace admettant les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non-colinéaires pour vecteurs directeurs.
Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est dit **normal** au plan $\mathcal{P}$ si il est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé, on considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$A(0\,;1\,;-1) \quad ; \quad B(1\,;-1\,;-8) \quad ; \quad C(-1\,;0\,;0)$$

1. Déterminer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{u}$.

2. Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{u}(3\,;-2\,;1)$ relativement au plan plan (ABC).

Exercice 13

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé, on considère les trois points A, B et C de coordonnées :

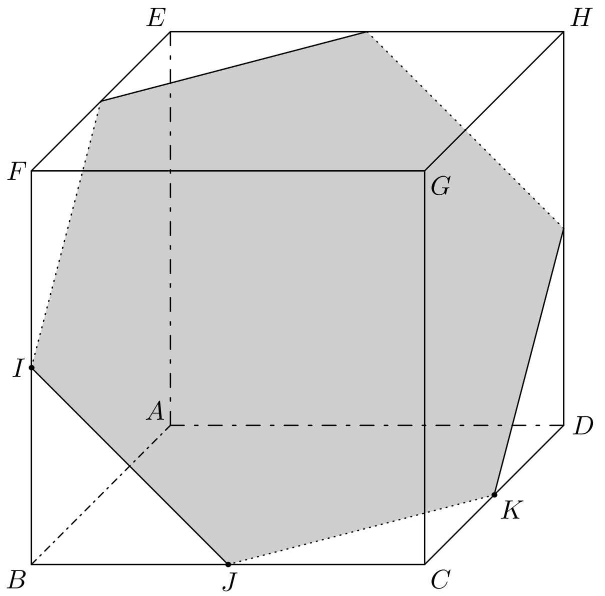
$$A\,(1\,;0\,;0) \quad ; \quad B\,(1\,;1\,;1) \quad ; \quad C(7\,;2\,;-1)$$

Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u}(-1\,;2\,;-2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 14

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.

Le point K est le milieu du segment $[CD]$.



Ci-dessus est représenté le plan (IJK).

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées A, G, I, J et K dans ce repère.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

Exercice 15

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé, on considère un plan $(\mathcal{P})$ admettant les vecteurs $\overrightarrow{u}\left(2\,;1\,;1\right)$ et $\overrightarrow{v}\left(2\,;-1\,;-2\right)$ non-colinéaires pour vecteurs directeurs.

Soit $\overrightarrow{n}\,(x\,;y\,;z)$ un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.

1. Montrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n}$ vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

2. On note $\overrightarrow{n}'$ le vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ ayant 1 pour cote et on note ses coordonnées : $\overrightarrow{n'}\left(x'\,;y'\,;1\right)$

   a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n}'$.

   b. Proposer un vecteur $\overrightarrow{n}''$ normal au plan $(\mathcal{P})$ à coordonnées entières.

Exercice 16

Définition - proposition :
Dans l'espace muni, on considère un point A et un plan $(\mathcal{P})$. On appelle **projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$**, l'unique point M intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la droite passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$

Corollaire : dans l'espace, on considère un point A et un plan $(\mathcal{P})$. Le projeté H du point A sur le plan $(\mathcal{P})$ est l'unique point du point $(\mathcal{P})$ tel que la droite (AH) est orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

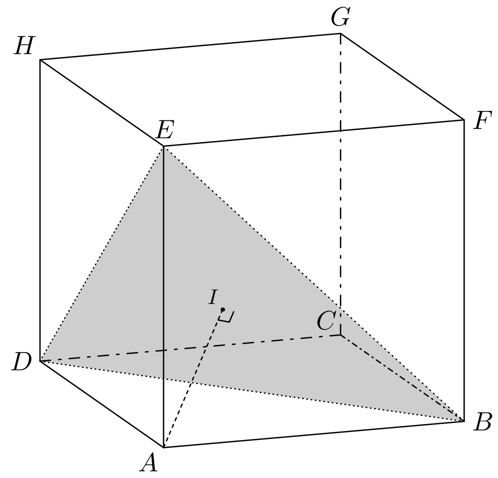
$ABCDEFGH$ est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point I de coordonnnées $I\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

1. a. Etablir l'égalité : $\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DI}$

   b. Montrer que le point I appartient au plan (BDE).

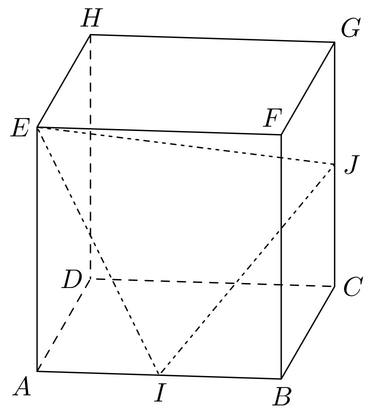
2. Montrer que le point I est le projeté du point A sur le plan (BDE).



Exercice 17

On considère le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, et on note I et J les milieux des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. On utilisera le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$

On note M le point de coordonnées :
$M\left(\frac{1}{2}\,;\frac{2}{5}\,;\frac{4}{5}\right)$

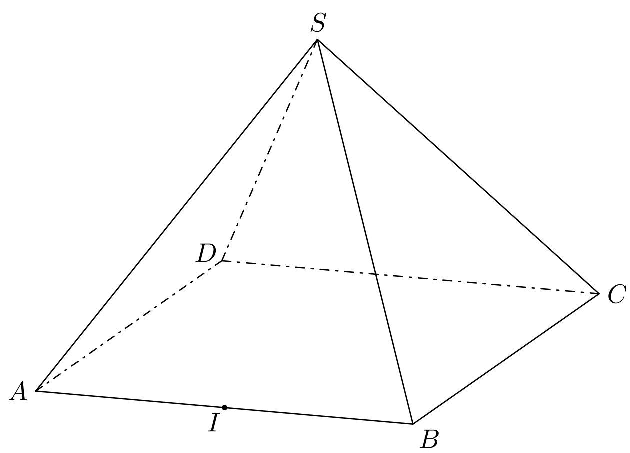


1. Montrer que le point M est le projeté du point I sur le plan (EFJ)

2. Montrer que le volume du tétraèdre $EFIJ$ est égal à $\frac{1}{6}$

Exercice 18

Dans l'espace, on considère le pyramide $ABCDS$ à base carré avec ses faces latérales qui sont toutes des triangles équilatérals. On note I le milieu du segment $[AB]$.



On muni l'espace du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé direct.

1. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{CS}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{CS}\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

On note $H(x\,;y\,;z)$ le projeté orthogonal du point A sur la droite (CS).

2. Justifier qu'il existe un réel k permettant d'écrire les coordonnées du point H :
$H\left(-\frac{1}{2}\cdot k+1\,;-\frac{1}{2}\cdot k+1\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot k\right)$

3. En déduire les coordonnées du point H.