CORRECTIONS

Exercices : Produit scalaire dans l'espace

Correction 1

1. La droite (EF) est parallèle à la droite (HG).
Les droites (HG) et (GC) sont perpendiculaires dans le plan (HGC).

On en déduit que les droites (EF) et (GC) sont orthogonales.

2. Effectuons un raisonnement par l'absurde :
Supposons que les droites (AD) et (HF) sont orthogonales.

Les droites (HF) et (DB) sont parallèles et les droites (AD) et (HF) sont orthogonales.
Si deux droites sont parallèles et si une troisième est orthogonale à l'une alors elle est orthogonale à l'autre. On en déduit que les droites (AD) et (DB).
Or, on aboutit à la contradiction que, dans un carré, la diagonale n'est pas perpendiculaire à ses côtés.

Ainsi, les droites (AD) et (HF) ne sont pas orthogonales.

3. Dans le cube, la droite (AB) est orthogonale au plan (BCG). Ainsi, la droite (AB) est orthogonale à toutes les droites du plan (BCG) : en particulier, (AB) est orthogonal à (BG).

Travaillons maintenant dans le plan (ABG) :
Le triangle ABG est rectangle en B. On en déduit que l'angle $\widehat{AGB}$ ne peut être droit

Les droites (AG) et (BG) ne sont pas orthogonales.

Correction 2

1. $ABFE$ est un carré : $(AE) \perp (AB)$
$EHDA$ est un carré : $(AE) \perp (AD)$.

La droite (AE) est orthogonale aux deux droites (AD) et (AB) non parallèles du plan (ABC) : la droite (AE) est orthogonale'au plan (ABC).

2. Dans le plan (ABC), le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore, on a :
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 5^2 + 5^2$$
$$AC = 25\times 2$$
$$AC = 5\sqrt{2}$$
La droite (AC) appartient au plan (ABC) et la droite (AE) est orthogonale au plan (ABC). On en déduit que la droite (AE) est orthogonale à la droite (AC).

Le triangle AEC est un triangle rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a :
$$EC^2 = AE^2 + AC^2$$
$$EC^2 = 5^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2$$
$$EC^2 = 25 + 25\times 2$$
$$EC^2 = 25\times 3$$
$$EC = 5\sqrt{3}$$

Correction 3

- La droite (AI) et (BD) sont incluses dans le même plan (ABD).
I étant le milieu du segment $[BD]$, la droite (AI) est la médiane issue de A dans le triangle ABD.
Le triangle ABD étant équilatéral, on en déduit que la droite (AI) est aussi la hauteur issue de A : les droites (AI) et (BD) sont orthogonales.
- La droite (CI) et (BD) sont incluses dans le même plan (ABD).
I étant le milieu du segment $[BD]$, la droite (CI) est la médiane issue de C dans le triangle ABD.
Le triangle CBD étant équilatéral, on en déduit que la droite (CI) est aussi la hauteur issue de C : les droites (CI) et (BD) sont orthogonales.

La droite (BD) est orthogonale aux deux droites (CI) et (AI) incluse dans le plan (ACI) : on en déduit que la droite (BD) est orthogonale au plan (ACI).

Correction 4

1. Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:
   - $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A)$
   $= \big(-5\,;3\,;-2\big)$
   - $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A\,;y_C - y_A\,;z_C - z_A)$
   $= \big(-4\,;-1\,;-1\big)$

   On vérifie facilement que le système ci-dessous n'admet aucune solution :
$$\begin{cases} -4 = k\cdot(-5) \\ -1 = k\times 3 \\ -1 = k\cdot(-2) \end{cases}$$
   On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A, B, C ne sont pas alignés.

2. Déterminons les longueurs des segments $[AC]$ et $[BC]$:
   - $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}$
   $= \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{18}$
   - $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2}$
   $= \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18}$

   Le triangle ABC est isocèle en C.

3. Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :
$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\frac{y_A + y_B}{2}\,;\frac{z_A + z_B}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{3 + (-2)}{2}\,;\frac{-1 + 2}{2}\,;\frac{5 + 3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;4\right)$$
   Ainsi, le point D est le milieu du segment $[AB]$ et la droite (CD) est la médiane du triangle ABC issue du point C. Le triangle ABC étant isocèle en C, on en déduit que la droite (CD) est également la hauteur issue de C.

Correction 5

1. On a les coordonnées suivantes :
$$A\,(1\,;1\,;0) \quad ; \quad B\,(1\,;0\,;0) \quad ; \quad C\,(0\,;0\,;0)$$
$$G\,(0\,;0\,;1) \quad ; \quad L\,(0\,;1\,;1)$$

On en déduit les coordonnées des milieux des segments $[AB]$, $[CG]$, $[GH]$:

$$I\left(1\,;\frac{1}{2}\,;0\right) \quad ; \quad K\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad L\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$$

2. a. Les coordonnées du point O milieu du segment $[IL]$ sont déterminées par la formule :

$$I\left(\frac{x_I+x_L}{2}\,;\frac{y_I+y_L}{2}\,;\frac{z_I+z_L}{2}\right) = \left(\frac{1+0}{2}\,;\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2}\,;\frac{0+1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$$

b. Déterminons les deux longueurs demandées :

- $OK = \sqrt{\left(x_K-x_O\right)^2+\left(y_K-y_O\right)^2+\left(z_K-z_O\right)^2}$

  $= \sqrt{\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}$

  $= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $KL = \sqrt{\left(x_L-x_K\right)^2+\left(y_L-y_K\right)^2+\left(y_L-y_K\right)^2}$

  $= \sqrt{\left(0-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$

  $= \sqrt{0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. a. Le polygone $IJKLMN$ est un héxagone régulier de centre O. Le triangle OK est un triangle équilatéral. On en déduit que $\widehat{KOL}$ mesure 60^o

b. Notons Q le pied de la hauteur issue de O dans le triangle KOL. Le triangle KOL étant équilatéral, on en déduit que la droite (OQ) est la bissectrice du triangle KOL.

Ainsi, dans le triangle OQK rectangle en Q, on a :

$$\cos 30^o = \frac{OQ}{OK}$$

$$OQ = \frac{\sqrt{3}}{2}\times OK$$

$$OQ = \frac{\sqrt{3}}{2}\times LK$$

L'aire du triangle KOL s'exprime par :

$$\mathcal{A} = \frac{b\times h}{2} = \frac{LK\times QO}{2} = \frac{LK\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times LK\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot LK^2}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4} = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{2}{4}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Correction 6

1. On a le produit scalaire :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times2+2\times(-1)+3\times1 = 2-2+3 = 3$

2. On a le produit scalaire :
$\vec{w}\cdot\vec{t} = -2\times(-1)+0\times1+1\times(-1) = 2+0-1 = 1$

Correction 7

1. - On a les coordonnées de vecteurs :

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AC}\,(x_C-x_A\,;y_C-y_A\,;z_C-z_A)$

$= \left(10-0\,;5-0\,;0-0\right) = \left(10\,;5\,;0\right)$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{CG}\,(x_G-x_C\,;y_G-y_C\,;z_G-z_C)$

$= \left(10-10\,;5-5\,;4-0\right) = \left(0\,;0\,;4\right)$

- $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{10^2+5^2+0^0}$

  $= \sqrt{100+25+0} = \sqrt{125}$

- $\|\overrightarrow{CG}\| = \sqrt{\|CG\|^2} = \sqrt{0^2+0^2+4^2}$

  $= \sqrt{0+0+16} = \sqrt{16} = 4$

- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CG} = 10\times0+5\times0+0\times4 = 0+0+0 = 0$

2. D'après la formule :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\cdot\left(\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{CG}\|^2\right)$$

$$0 = \frac{1}{2}\cdot\left(\|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}\|^2-125-16\right)$$

$$0 = \|\overrightarrow{AG}\|^2-141$$

$$\|\overrightarrow{AG}\|^2 = 141$$

$$\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{141}$$

Correction 8

Effectuons le calcul des distances de chacun des côtés du triangle ABC :

- $AB^2 = (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(y_B-y_A)^2$

  $= (-10)^2+(-3)^2+(-5)^2 = 100+9+25 = 134$

- $AC^2 = (x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(y_C-y_A)^2$

  $= (-2)^2+2^2+1^2 = 4+4+1 = 9$

- $BC^2 = (x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(y_C-y_B)^2$

  $= 8^2+5^2+6^2 = 64+25+36 = 125$

On remarque l'égalité : $AB^2 = AC^2+BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

Correction 9

Dans le repère $\left(D\,;\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH}\right)$, on a les coordonnées :

$$I\left(1\,;\frac{1}{2}\,;0\right) \;;\; J\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right) \;;\; C\left(0\,;1\,;0\right) \;;\; K\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$$

On a les coordonnées de vecteurs :

- $\overrightarrow{IJ}\,(x_J-x_I\,;y_J-y_I\,;z_J-z_I)$

  $= \left(0-1\,;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}-0\right) = \left(-1\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$

- $\overrightarrow{CK}\,(x_K-x_C\,;y_K-y_C\,;z_K-z_C)$

  $= \left(\frac{1}{2}-0\,;0-1\,;1-0\right) = \left(\frac{1}{2}\,;-1\,;1\right)$

Calculons le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CK}$. On a :
$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CK} = -1\times\frac{1}{2}+0\times(-1)+\frac{1}{2}+1 = -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} = 0$

Le produit scalaire étant nul, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont orthogonaux : les droites (IJ) et (CK) sont orthogonales.

Correction 10

1. Les trois points A, H, G étant distincts, ils forment un

plan.
La droite (HG) est incluse dans le plan (AHG), le point A appartient au plan (AHG).
La droite (AB) étant parallèle à la droite (HG) et passant par le point A, on en déduit que la droite (AB) est incluse dans le plan (AHG).

Les quatre points A, H, G, B appartenant au plan (AHG), on en déduit que les droites (AG) et (BH) sont coplanaires.

2. Munissons le plan du repère $\left(A\,;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ orthonormé.

On a les coordonnées suivantes :
$A(0\,;0\,;0)$; $B(a\,;0\,;0)$; $H(0\,;1\,;1)$; $G(a\,;1\,;1)$

On a les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{AG}\,(x_G-x_A\,;y_G-y_A\,;z_G-z_A)$
  $=\left(a-0\,;1-0\,;1-0\right)=\left(a\,;1\,;1\right)$
- $\overrightarrow{BH}\,(x_H-x_B\,;y_H-y_G\,;z_H-z_G)$
  $=\left(0-a\,;0-0\,;1-0\right)=\left(-a\,;1\,;1\right)$

Pour que les droites (HB) et (AG) soient perpendiculaires, il faut que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{AG}$ soit nul :

$$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AG}=0$$
$$a\cdot\left(-a\right)+1\times1+1\times1=0$$
$$-a^2+1+1=0$$
$$-a^2=-2$$
$$a^2=2$$

Le nombre a représentant une longueur, on en déduit que : $a=\sqrt{2}$

Correction 11

1. On a les coordonnées suivantes des vecteurs :

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A)$
  $=\left(1-(-2)\,;2-0\,;-1-1\right)=\left(3\,;2\,;-2\right)$
- $\overrightarrow{AC}=\left(-2-(-2)\,;2-0\,;2-1\right)=\left(0\,;2\,;1\right)$

On a le produit scalaire suivant :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times0+2\times2+(-2)\times1=0+4-2=2$

On a les longueurs suivantes :

- $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$
  $=\sqrt{\left(1-(-2)\right)^2+\left(2-0\right)^2+\left(-1-1\right)^2}$
  $=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$
- $AC=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{0+4+1}=\sqrt{5}$

2. On a la définition suivante du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$$
$$2=\sqrt{17}\times\sqrt{5}\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$$
$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}}$$

A l'aide des relations trigonométriques inverses :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}}\right)$$
$$\approx\ 77{,}47$$

Ainsi, au degré près, on a la mesure suivante :
$\widehat{BAC}=77^o$

3. La mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ n'est pas un angle plat ; on en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Correction 12

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

- $\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A)$
  $=\left(1-0\,;-1-1\,;-8-(-1)\right)$
  $=\left(1\,;-2\,;-8+1\right)=\left(1\,;-2\,;-7\right)$
- $\overrightarrow{AC}\,(x_C-x_A\,;y_C-y_A\,;z_C-z_A)$
  $=\left(-1-0\,;0-1\,;0-(-1)\right)=\left(-1\,;-1\,;1\right)$

Déterminons les deux produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u}=1\times3+(-2)\times(-2)+(-7)\times1=3+4-7=0$
- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{u}=-1\times3+(-1)\times(-2)+1\times1=-3+2+1=0$

2. On remarque facilement que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non-colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ étant orthogonal à deux vecteurs non-colinéaires du plan (ABC), on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

Correction 13

Déterminons les coordonnées des deux vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A)$
  $=\left(1-1\,;1-0\,;1-0\right)=\left(0\,;1\,;1\right)$
- $\overrightarrow{AC}\,(y_C-y_A\,;y_C-y_A\,;z_C-z_A)$
  $=\left(7-1\,;2-0\,;-1-0\right)=\left(6\,;2\,;-1\right)$

La comparaison des abscisses de ces deux vecteurs permet de montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires entre eux.

Effectuons les deux produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u}=0\times(-1)+1\times2+1\times(-2)=0+2-2=0$
- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{u}=6\times(-1)+2\times2+(-1)\times(-2)$
  $-6+4+2=0$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non-colinéaires du plan (ABC), on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au plan (ABC).

Correction 14

1. On a les coordonnées suivantes :

$$A\,(0\,;0\,;0)\quad;\quad G\,(1\,;1\,;1)\quad;\quad I\left(1\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$$
$$J\left(1\,;\frac{1}{2}\,;0\right)\quad;\quad K\left(\frac{1}{2}\,;1\,;0\right)$$

2. On a les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{AG}\,(x_G-x_A\,;y_G-y_A\,;z_G-z_A)$
  $=\left(1-0\,;1-0\,;1-0\right)=\left(1\,;1\,;1\right)$

- $\overrightarrow{IJ}\,(x_J-x_I\,;y_J-y_I\,;z_J-z_I)$
$=\Big(1-1\,;\dfrac{1}{2}-0\,;0-\dfrac{1}{2}\Big)=\Big(0\,;\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\Big)$
- $\overrightarrow{IK}\,(x_K-x_I\,;y_K-y_I\,;z_K-z_I)$
$=\Big(\dfrac{1}{2}-1\,;1-0\,;0-\dfrac{1}{2}\Big)=\Big(-\dfrac{1}{2}\,;1\,;-\dfrac{1}{2}\Big)$

On remarque que les droites (IJ) et (IK) sont non-colinéaires.

On a les produits scalaires :

- $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IJ}=1\times0+1\times\dfrac{1}{2}+1\times\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)=0+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$
- $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IK}=1\times\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)+1\times1+\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)\times1$
$=-\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{1}{2}=0$

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal aux couples de vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ non-colinéaires : le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

Correction 15

1.
- Le vecteur $\overrightarrow{n}$ étant normal au plan $(\mathcal{P})$, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$ qui est un vecteur directeur de ce plan :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}&=0\\ 2\cdot x+1\cdot y+1\cdot z&=0\\ 2x+y+2z&=0\end{aligned}$$
- Le vecteur $\overrightarrow{n}$ étant normal au plan $(\mathcal{P})$, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{v}$ qui est un vecteur directeur de ce plan :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}&=0\\ 2\cdot x+(-1)\cdot y+(-2)\cdot z&=0\\ 2x-y-2z&=0\end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n}$ vérifient le système :
$$\begin{cases}2x+y+z=0\\ 2x-y-2z=0\end{cases}$$

2. a. Puisque le vecteur $\overrightarrow{n}'$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ et que sa cote a pour valeur 1, ses coordonnées vérifient le système d'équations :
$$\begin{cases}2x+y+1=0\\ 2x-y-2\times1=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2x+y=-1\\ 2x-y=2\end{cases}$$
Par addition de ces deux équations, on obtient l'équation :
$$\begin{aligned}2x+2x&=-1+2\\ 4x&=1\\ x&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$
Par substitution de cette valeur dans la première équation, on a :
$$\begin{aligned}2x+y&=-1\\ 2\times\frac{1}{4}+y&=-1\\ \frac{1}{2}+y&=-1\\ y&=-1-\frac{1}{2}\\ y&=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$
Le vecteur $\overrightarrow{n}'$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{n}'\Big(\dfrac{1}{4}\,;-\dfrac{3}{2}\,;1\Big)$

b. Le vecteur $4\cdot\overrightarrow{n}'$ est un vecteur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}'$ et donc aussi normal au plan $(\mathcal{P})$.
Ainsi, pour le vecteur $\overrightarrow{n}''$ à coordonnées entières, on peut définir :
$\overrightarrow{n}''=4\cdot\overrightarrow{n}'=\big(1\,;-6\,;4\big)$

Correction 16

1. a.
- On a les coordonnées des vecteurs :
  - $\overrightarrow{DB}\,(x_B-x_D\,;y_B-y_D\,;z_B-z_D)$
  $=\big(1-0\,;0-1\,;0-0\big)=\big(1\,;-1\,;0\big)$
  - $\overrightarrow{DE}\,(x_E-x_D\,;y_E-y_D\,;z_E-z_D)$
  $=\big(0-0\,;0-1\,;1-0\big)=\big(0\,;-1\,;1\big)$
  - $\overrightarrow{DI}\,(x_I-x_D\,;y_I-y_D\,;z_I-z_D)$
  $=\Big(\dfrac{1}{3}-0\,;\dfrac{1}{3}-1\,;\dfrac{1}{3}-0\Big)=\Big(\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{3}\Big)$
- Le vecteur $\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DB}+\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées :

$\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DB}+\dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DE}$
$=\Big(\dfrac{1}{3}\times1+\dfrac{1}{3}\times0\,;\dfrac{1}{3}\times(-1)+\dfrac{1}{3}\times(-1)\,;\dfrac{1}{3}\times0+\dfrac{1}{3}\times1\Big)$
$=\Big(\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\Big)=\Big(\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{3}\Big)=\overrightarrow{DI}$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont deux vecteurs non-colinéaires du plan (BDE). Le vecteur $\overrightarrow{DI}$ s'exprimant dans la base $\big(\overrightarrow{DB}\,;\overrightarrow{DE}\big)$, on en déduit que $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur directeur du plan (BDE).
Le point D appartenant au plan (BDE), on en déduit que le point I appartient au plan (BDE).

2.
- Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{AI}\,(x_I-x_A\,;y_I-y_A\,;z_I-z_A)$
$=\Big(\dfrac{1}{3}-0\,;\dfrac{1}{3}-0\,;\dfrac{1}{3}-0\Big)=\Big(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\Big)$
- On a les produits scalaires :
  - $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{3}\times1+\dfrac{1}{3}\times(-1)+\dfrac{1}{3}\times0=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}+0=0$
  - $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{3}\times0+\dfrac{1}{3}\times(-1)+\dfrac{1}{3}\times1=0-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=0$

Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ étant orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DE}$ non-colinéaires directeurs du plan (DBE), on en déduit que la droite (AI) est orthogonale au plan (DBE).

Correction 17

1. - On a les coordonnées des deux vecteurs :

   ➯ $\overrightarrow{EF}\,(x_F - x_E\,;y_F - y_E\,;z_F - z_E)$
   $= \big(1{-}0\,;0{-}0\,;1{-}1\big) = \big(1\,;0\,;0\big)$

   ➯ $\overrightarrow{FJ}\,(x_J - x_F\,;y_J - y_F\,;z_J - z_F)$
   $= \Big(1{-}1\,;1{-}0\,;\frac{1}{2}{-}1\Big) = \Big(0\,;1\,;-\frac{1}{2}\Big)$

   ➯ $\overrightarrow{IM}\,(x_M - x_I\,;y_M - y_I\,;z_M - z_I)$
   $= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,;\frac{2}{5} - 0\,;\frac{4}{5} - 0\Big) = \Big(0\,;\frac{2}{5}\,;\frac{4}{5}\Big)$

   - On a les produits scalaires :

   ➯ $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{IM} = 1{\times}0 + 0{\times}\frac{2}{5} + 0{\times}\frac{4}{5} = 0 + 0 + 0 = 0$

   ➯ $\overrightarrow{FJ}\cdot\overrightarrow{IM} = 0{\times}0 + 1{\times}\frac{2}{5} + \Big(-\frac{1}{2}\Big){\times}\frac{4}{5}$
   $= 0 + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$

   Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FJ}$ non-colinéaires et directeurs du plan (EFJ), on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{IM}$ est un vecteur normal au plan (EFJ).

   - Le vecteur $\overrightarrow{EM}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{EM}\,(x_M - x_E\,;y_M - y_E\,;z_M - z_E)$
   $= \Big(\frac{1}{2} - 0\,;\frac{2}{5} - 0\,;\frac{4}{5} - 1\Big) = \Big(\frac{1}{2}\,;\frac{2}{5}\,;-\frac{1}{5}\Big)$

   - Le vecteur $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{EF} + \frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{FJ}$ a pour coordonnées :
   $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{EF} + \frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{FJ}$
   $= \Big(\frac{1}{2}{\times}1 + \frac{2}{5}{\times}0\,;\frac{1}{2}{\times}0 + \frac{2}{5}{\times}1\,;\frac{1}{2}{\times}0 + \frac{2}{5}{\times}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big)$
   $= \Big(\frac{1}{2} + 0\,;0 + \frac{2}{5}\,;0 - \frac{1}{5}\Big) = \Big(\frac{1}{2}\,;\frac{2}{5}\,;\frac{1}{5}\Big) = \overrightarrow{EM}$

   Le vecteur $\overrightarrow{EM}$ étant une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FJ}$, inclus dans le plan (EFJ), on en déduit que le point M appartient au plan (EFJ).

   Le point M appartenant au plan (EFJ) et la droite (MI) étant orthogonale au plan (EFJ), on en déduit que le point M est le projeté orthogonal du point I sur le plan (EFJ).

2. Dans le tétraèdre $EFIJ$ relativement au sommet I :

   - Le segment $[IM]$ est la hauteur issue du sommet I. Sa mesure est :
   $IM = \sqrt{\big(x_M - x_I\big)^2 + \big(y_M - y_I\big)^2 + \big(z_M - z_I\big)^2}$
   $= \sqrt{\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{2}{5} - 0\Big)^2 + \Big(\frac{4}{5} - 0\Big)^2}$
   $= \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

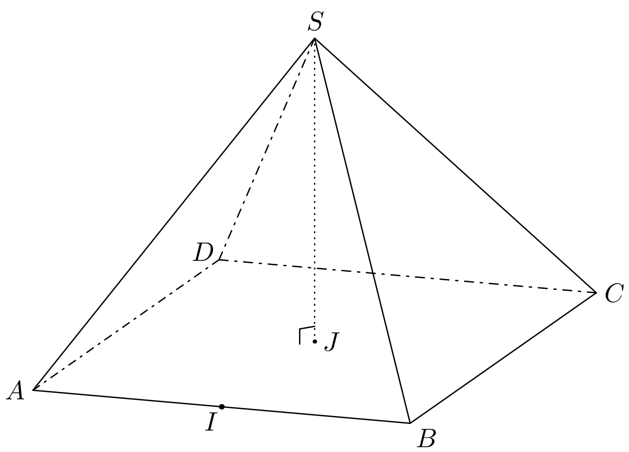
   - La base EFJ est un triangle rectangle en F puisque l'arête $[EF]$ est orthogonale à la face (BFC).

   ➯ Dans le triangle FGJ rectangle en G et d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :
   $FJ^2 = FG^2 + GJ^2$
   $FJ^2 = 1^2 + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2$
   $FJ^2 = 1 + \frac{1}{4}$
   $FJ^2 = \frac{5}{4}$
   $FJ = \sqrt{\sqrt{5}2}$

   ➯ L'aire de cette base est :
   $\mathcal{A}_{FGJ} = \frac{EF{\times}FJ}{2} = \frac{1{\times}\frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

   Ainsi, le tétraèdre $EFIJ$ a pour volume :
   $\mathcal{V}_{EFIJ} = \frac{1}{3}{\times}\mathcal{A}_{FGJ}{\times}IM = \frac{1}{3}{\times}\frac{\sqrt{5}}{4}{\times}\frac{2\sqrt{5}}{5}$
   $= \frac{1{\times}\sqrt{5}{\times}2\sqrt{5}}{3{\times}4{\times}5} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

Correction 18



1. Notons J le milieu du segment $[AC]$.

   - Le triangle SAC étant isocèle en S, on en déduit que le projeté orthogonal du point S sur la droite (AC) est le point J.
   On en déduit que la droite (SJ) est orthogonale à la droite (AC).

   - Le triangle SBD étant isocèle en S, on en déduit que le projeté orthogonal du point S sur la droite (BD) est le point J.
   On en déduit que la droite (SJ) est orthogonale à la droite (BD).

   Les droites (AC) et (BD) appartenant au plan (ABC) et étant non-parallèles, on en déduit que la droite (SJ) est orthogonale au plan (ABC). Le point J est le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC).

   Le point J a pour coordonnées $J\Big(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\Big)$. A l'aide du théorème de pythagore appliqué dans le triangle ACS, on montre que : $S\Big(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$

   Le vecteur $\overrightarrow{CS}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{CS}\,(x_S - x_C\,;y_S - y_C\,;z_S - z_C)$
   $= \Big(\frac{1}{2} - 1\,;\frac{1}{2} - 1\,;\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\Big) = \Big(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$

2. Le projeté H du point I sur la droite (CS) appartient à cette droite. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{CS}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires.
On en déduit l'existence d'un réel k vérifiant la relation :
$\overrightarrow{CH} = k\cdot\overrightarrow{CS}$

Par identification des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CH}(x-1\,;y-1\,;z)$ avec les coordonnées du vecteur $k\cdot\overrightarrow{CS}$ permet d'obtenir le système d'équations :

$$\begin{cases} x-1 = -\dfrac{1}{2}\cdot k \\ y-1 = -\dfrac{1}{2}\cdot k \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot k \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}\cdot k+1 \\ y = -\dfrac{1}{2}\cdot k+1 \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot k \end{cases}$$

3. Le vecteur $\overrightarrow{IH}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{IH}\,(x_H - x_I\,; y_H - y_I\,; y_H - y_I)$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cdot k+1-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\cdot k+1-0\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot k-0\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cdot k+\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\cdot k+1\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot k\right)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{CS}$ étant orthogonaux, leur produit scalaire vaut 0 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{CS} &= 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\cdot k+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\cdot k+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot k\right) &= 0 \\ \frac{1}{4}\cdot k-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot k-\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\cdot k &= 0 \\ k-\frac{3}{4} &= 0 \\ k &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

On en déduit les coordonnées du point H :

$$H\left(-\frac{1}{2}\cdot k+1\,;-\frac{1}{2}\cdot k+1\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot k\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+1\,;-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+1\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{3}{8}+1\,;-\frac{3}{8}+1\,;\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{8}\,;\frac{5}{8}\,;\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)$$