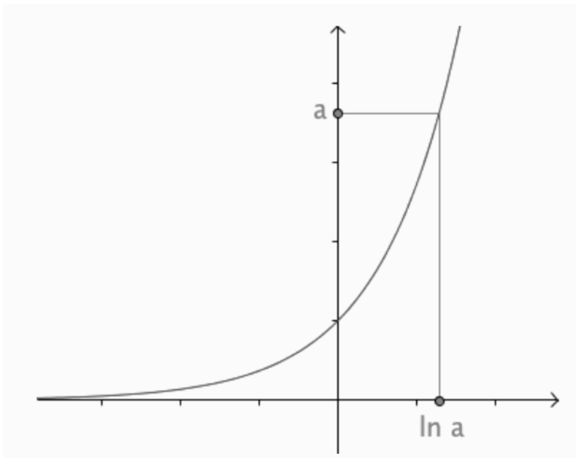
Fonction Logarithme Népérien - Partie 1

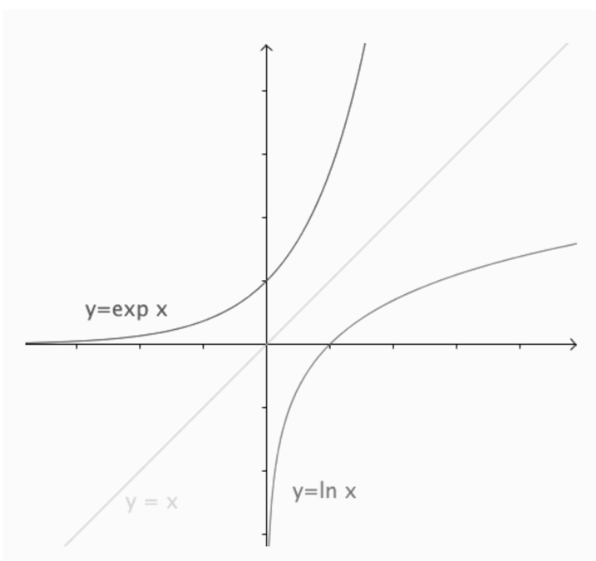
I Définition

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0;+\infty[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de $]0;+\infty[$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$



Définition 1
On appelle ***logarithme népérien*** *d'un réel strictement positif* a*, l'unique solution de l'équation* $e^x = a$*.*
On la note $\mathbf{ln}\,\boldsymbol{a}$*.*
La fonction logarithme népérien*, notée* **ln***, est la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$

Remarque
- Les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre
- Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
- Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale notée **log**, définie par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$



Propriété 1 (Conséquences)

1. Pour $x > 0$: $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$
2. $\ln 1 = 0$ $\qquad \ln e = 1$ $\qquad \ln \frac{1}{e} = -1$
3. $\ln e^x = x$
4. Pour $x > 0$: $e^{\ln x} = x$

Exemple 1
Démontrer les propriétés b) c) et d)

II Propriétés

1) Relation fonctionnelle

Théorème 1
Pour tous réels x et y strictement positifs, on a $\boldsymbol{\ln(x \times y) = \ln x + \ln y}$

Démonstration

Remarque
Cette formule permet de transformer un produit en somme

2) Conséquences

Propriété 2 (Corrolaires)
Pour tous réels x et y strictements positifs, on a :

1. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
2. $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
3. $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$
4. $\ln x^n = n \ln x$ avec n entier relatif

Démonstration

Exercice 1
Simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln(3+\sqrt{5}) + \ln(3-\sqrt{5})$ $\qquad B = \ln 5 + \ln 2 - 2\ln 3$ $\qquad C = \ln e^2 - \ln \dfrac{2}{e}$

3) Equations et inéquations

Propriété 3
Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

1. $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
2. $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

Exercice 2
1) Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :
a) $\ln x = 2$ avec $I =]0;+\infty[$ b) $e^{x+1} = 5$ avec $I = \mathbb{R}$
c) $3\ln x - 4 = 8$ avec $I =]0;+\infty[$ d) $\ln(6x+1) \geq 2$ avec $I =]\dfrac{1}{6};+\infty[$
e) $e^x + 5 > 4e^x$ avec $I = \mathbb{R}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations/inéquations suivantes :
a) $\ln(x-3) + 9\ln(9-x) = 0$ b) $\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$