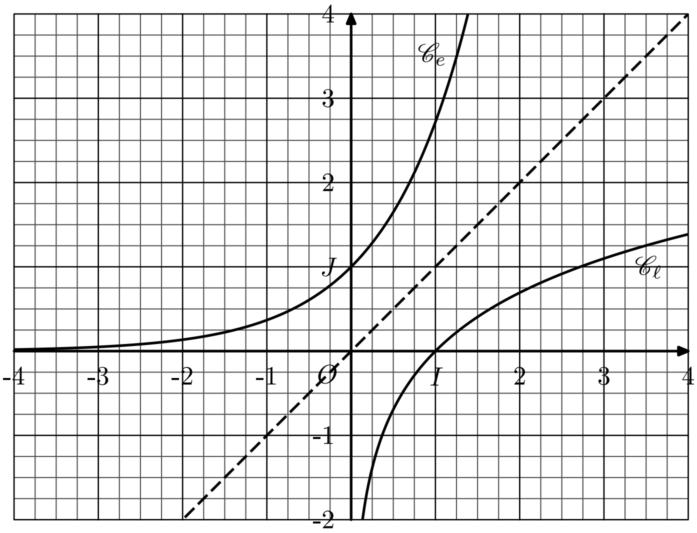
Exercices : Fonction ln - Partie 1

Exercice 1

Dans le plan munit du repère orthonormé $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_e$ et $\mathscr{C}_\ell$ représentatives des fonctions exponentielle et logarithme :



1. Graphiquement déterminer les valeurs des deux images suivantes :
$\left(\exp\circ\ln\right)(1)$; $\left(\ln\circ\exp\right)(0)$

2. En utilisant la première bissectrice du plan, déterminer, si possible, la valeur des images suivantes :

a. $\left(\exp\circ\ln\right)(2)$ b. $\left(\exp\circ\ln\right)(3)$

c. $\left(\exp\circ\ln\right)(-1)$ d. $\left(\ln\circ\exp\right)(-1)$

e. $\left(\ln\circ\exp\right)(1)$ f. $\left(\ln\circ\exp\right)(1{,}5)$

Exercice 2

1. a. Résoudre chacune des inéquations suivantes :
$3x+1>0$; $-x+2>0$

b. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g :
$f(x)=\ln(3x+1)$; $g(x)=\ln(-x+2)$

2. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a. $h(x)=\ln x^2$ d. $j(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x-1\right)$

e. $k(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)$ f. $\ell(x)=\dfrac{1}{\ln(x)-1}$

Exercice 3

Exprimer chacun des nombres suivants à l'aide de $\ln 2$:

a. $\ln(4)$ b. $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$ c. $\ln(6)-\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

d. $\ln\left(2\cdot\mathrm{e}^2\right)$ e. $\ln\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}^3}\right)$ f. $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^5}\right)$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :
$f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $\mathbb{R}$, établir l'identitié : $f(x)=x+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$

3. En déduire que la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5

Pour chaque question, préciser l'ensemble de résolution de l'équation puis la résoudre :

a. $\ln(5x+1)=\ln(x-1)$ b. $2\cdot\ln(3-x)=\ln(2)$

c. $\ln(3x+1)=5$ d. $3\cdot\mathrm{e}^{2x-1}=2$

e. $\left(\ln x\right)^2-\ln x-2=0$ f. $\mathrm{e}^{2x}+4\cdot\mathrm{e}^x-1=0$

Exercice 6

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les deux systèmes d'équations suivants :

a. $\begin{cases} 2\cdot\ln x - 3\cdot\ln y = -11 \\ \ln x + \ln y = 2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \ln(2\cdot x+y) = 0 \\ \ln(x)+\ln(y) = 1 \end{cases}$

Exercice 7

1. Résoudre dans $\left]-1\,;+\infty\right[$, l'inéquation :
(E) : $\ln(x+1)\leqslant\ln\left(x^2+1\right)$

2. Résoudre dans $\left]-3\,;2\right[$, l'inéquation :
(F) : $\ln(4-2x)<\ln(x+3)$

Exercice 8

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules :
75 % de particules A et 25 % de particules de B.

Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note $p(t)$ la proportion de particules de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t=0$, on a $p(0)=0{,}75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a :
$p(t)=0{,}75\cdot\mathrm{e}^{-\lambda\cdot t}$ où λ est une constante réelle.

La demi-vie des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.

2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B?

3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B *(on arrondi à l'unité).*

Exercice 9

Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, les inéquations suivantes :

a. $5^n\geqslant 2$ b. $0{,}1^n\geqslant 2$

c. $\left(\ln 2\right)^n<\mathrm{e}^2$ d. $\ln\left(2^n\right)-\ln\left(3^n\right)\leqslant 2$

Exercice 10

1. On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{2}{3}$.

   a. Quelle est la limite de la suite (u_n)?

   b. Déterminer le plus petit entier naturel n réalisant l'inégalité :
   $u_n < 0{,}01$

2. On considère la suite (v_n) géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{4}{5}$. On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (v_n) :
   $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

   a. Justifier que la suite (S_n) est croissante.

   b. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n.

   c. Justifier qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (S_n) appartiennent à l'intervalle $[9{,}9\,;10]$.

   d. Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant $S_n \in [9{,}9\,;10]$.

Exercice 11

Résoudre l'équation et l'inéquation ci-dessous :

a. $\mathrm{e}^{2x} + 2{\cdot}\mathrm{e}^{x} - 3 = 0$ b. $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2 < 0$

Exercice 12

Résoudre l'inéquation : $2{\cdot}\mathrm{e}^{2\cdot x} + 6{\cdot}\mathrm{e}^{x} - 8 < 0$

Exercice 13

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{\mathrm{e}^{x}+3}{\mathrm{e}^{x}-1} > 0$ b. $-\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 2 > 0$

Exercice 14

Soit f la fonction définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction f.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que la fonction f' admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{x}\cdot\left(\mathrm{e}^{2x} - 4{\cdot}\mathrm{e}^{x} + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right)^2}$$

3. a. Etudier le signe du polynôme $x^2 - 4x + 1$.

   b. En déduire que la fonction f' admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On précisera les valeurs de a et de b.

4. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f. On y précisera les valeurs approchées de $f(a)$ et de $f(b)$.