CORRECTIONS

Exercices : Fonction ln - Partie 1

Correction 1

1. • $\big(\exp\circ\ln\big)(1)=\exp\big[\ln(1)\big]=\exp(0)$
 • $\big(\ln\circ\exp\big)(0)=\ln(1)=0$

2. On observe les valeurs suivantes :
 a. $\big(\exp\circ\ln\big)(2)=2$
 b. $\big(\exp\circ\ln\big)(3)=3$
 c. $\big(\exp\circ\ln\big)(-1)$ n'est pas définie car l'image de -1 n'est pas définie par la courbe $\mathscr{C}_\ell$.
 d. $\big(\ln\circ\exp\big)(-1)=-1$
 e. $\big(\ln\circ\exp\big)(1)=1$
 f. $\big(\ln\circ\exp\big)(1{,}5)=1{,}5$

Correction 2

1. a. On a les deux inégalitions suivantes :
 • $3x+1>0$
 $3x>-1$
 $x>-\dfrac{1}{3}$
 L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\Big]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\Big[$
 • $-x+2>0$
 $-x>-2$
 $x<2$
 L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\big]-\infty\,;2\big[$

 b. Des solutions des inéquations précédentes, on en déduit :
 $\mathcal{D}_f=\Big]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\Big[$; $\mathcal{D}_g=\big]-\infty\,;2\big[$

2. a. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et un carré étant toujours positif, l'ensemble de définition de la fonction h est :
 $\mathcal{D}_h=\mathbb{R}^*$

 b. Cherchons les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité suivante est vérifiée :
 $e^x-1>0$
 $e^x>1$
 La fonction logarithmique est strictement croissante :
 $\ln\big(e^x\big)>\ln 1$
 $x>0$
 L'ensemble de définition de la fonction j est :
 $\mathcal{D}_j=\mathbb{R}_+^*$

 c. On a la factorisation suivante de la fonction ln :
 $\ln\big(e^x-e^{-x}\big)=\ln\Big[e^x\cdot\big(1-e^{-2\cdot x}\big)\Big]$
 Le facteur e^x étant strictement positif, le signe de l'argument de la fonction ln ne dépend que de son second facteur ; résolvons l'inéquation suivante :
 $1-e^{-2\cdot x}>0$
 $-e^{-2\cdot x}>-1$
 $e^{-2\cdot x}<1$
 La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
 $\ln\big(e^{-2\cdot x}\big)<\ln 1$
 $-2\cdot x<0$
 $x>\dfrac{0}{-2}$
 $x>0$
 On en déduit : $\mathcal{D}_k=\mathbb{R}_+^*$.

 d. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$: $\mathcal{D}_\ell\subset\mathbb{R}_+^*$
 Le dénominateur s'annule lorsque l'égalité ci-dessous est vérifiée :
 $\ln(x)-1=0$
 $\ln(x)=1$
 $e^{\ln x}=e^1$
 $x=e$
 On en déduit l'ensemble de définition de la fonction ℓ :
 $\mathcal{D}_\ell=\mathbb{R}_+^*-\{e\}$

Correction 3

a. $\ln(4)=\ln(2\times2)=\ln 2+\ln 2=2\cdot\ln 2$

b. $\ln\big(2\sqrt{2}\big)=\ln 2+\ln\sqrt{2}=\ln 2+\dfrac{1}{2}\cdot\ln 2=\dfrac{3}{2}\cdot\ln 2$

c. $\ln(6)-\ln\Big(\dfrac{3}{2}\Big)=\ln(2\times3)-\big(\ln 3-\ln 2\big)$
 $=\big(\ln 2+\ln 3\big)-\ln 3+\ln 2=2\cdot\ln 2$

d. $\ln\big(2\cdot e^2\big)=\ln 2+\ln\big(e^2\big)=\ln 2+2=2+\ln 2$

e. $\ln\Big(\dfrac{2}{e^3}\Big)=\ln 2-\ln\big(e^3\big)=\ln 2-3=-3+\ln 2$

f. $\ln\big(\sqrt{e^5}\big)=\dfrac{1}{2}\cdot\ln\big(e^5\big)=\dfrac{1}{2}\times5\cdot\ln e=\dfrac{1}{2}\times5\times1=\dfrac{5}{2}$

Correction 4

1. Les termes de la somme e^x+e^{-x} sont strictement positif : la somme est strictement positive.
 On en déduit que la fonction f est strictement positive.

2. On a les transformations algébriques :
 $f(x)=\ln\big(e^x+e^{-x}\big)=\ln\big[e^x\cdot\big(1+e^{-2x}\big)\big]$
 $=\ln\big(e^x\big)+\ln\big(1+e^{-2x}\big)=x+\ln\big(1+e^{-2x}\big)$

3. Pour tout réel x positif ou nul, on a :
 $e^{-2x}\geqslant 0$
 $1+e^{-2x}\geqslant 1$
 $\ln\big(1+e^{-2x}\big)\geqslant\ln 1$
 $\ln\big(1+e^{-2x}\big)\geqslant 0$
 Or, x est positif ou nul :
 $x+\ln\big(1+e^{-2x}\big)\geqslant 0$
 $f(x)\geqslant 0$

Correction 5

a. Le membre de gauche est définit sur $\left]-\frac{1}{5}\,;+\infty\right[$ et le membre de droite est défini sur $\left]1\,;+\infty\right[$.
Ainsi, cette équation est définie sur $\left]1\,;+\infty\right[$.

On a la résolution suivante :
$$\ln(5x+1) = \ln(x-1)$$
$$e^{\ln(5x+1)} = e^{\ln(x-1)}$$
$$5x+1 = x-1$$
$$4x = -2$$
$$x = -\frac{1}{2}$$
Cette valeur n'appartient pas à l'ensemble de définition de cette équation, on en déduit :
$\mathcal{S} = \varnothing$

b. Cette équation est définie sur l'intervalle $\left]-\infty\,;3\right[$

On a les transformations suivantes :
$$2\cdot\ln(3-x) = \ln(2)$$
$$e^{2\cdot\ln(3-x)} = e^{\ln(2)}$$
$$\left[e^{\ln(3-x)}\right]^2 = 2$$
$$(3-x)^2 = 2$$
$$9-6x+x^2 = 2$$
$$x^2-6x+7 = 0$$
Le polynôme du membre de gauche a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-6)^2-4\times1\times7 = 8$
On a la simplification suviante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
Le discriminant étant strictement positif, on a déduit les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-2\sqrt{2}}{2} = 3-\sqrt{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+2\sqrt{2}}{2} = 3+\sqrt{2}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \left\{3-\sqrt{2}\right\}$

c. Cette équation est définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$:

De l'égalité, on a :
$$\ln(3x+1) = 5$$
$$e^{\ln(3x+1)} = e^5$$
$$3x+1 = e^5$$
$$x = \frac{e^5-1}{3}$$

Cette équation a pour unique solution : $x = \frac{e^5-1}{3}$

d. Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$. On a :
$$3\cdot e^{2x-1} = 2$$
$$e^{2x-1} = \frac{2}{3}$$
$$\ln\left(e^{2x-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$2x-1 = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$2x = \ln\left(\frac{2}{3}\right)+1$$
$$x = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)+1}{2}$$

e. Cette équation est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons le changement de variable $X = \ln x$:
$$\left(\ln x\right)^2 - \ln x - 2 = 0$$
$$X^2 - X - 2 = 0$$
Le polynôme du second degré du membre de gauche a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-1)^2-4\times1\times(-2) = 1+8 = 9$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$
Cette équation admet les deux racines suivantes :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-3}{2} = -1$$
$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+3}{2} = 2$$

Cherchons les valeurs de x vérifiant le changement de variable :

$$X_1 = -1 \qquad \ln x_1 = -1 \qquad e^{\ln x_1} = e^{-1} \qquad x_1 = e^{-1}$$
$$X_2 = 2 \qquad \ln(x_2) = 2 \qquad e^{\ln(x_2)} = e^2 \qquad x_2 = e^2$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{e^{-1}\,;e^2\right\}$

f. Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$.
Posons le changement de variable : $X = e^x$
L''équation devient :
$$e^{2x}+4\cdot e^x-1 = 0$$
$$\left(e^x\right)^2+4\cdot e^x-1 = 0$$
$$X^2+4\cdot X-1 = 0$$
Le membre de droite est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 4^2-4\times1\times(-1) = 16+4 = 20$
On a la simplification suivante : $\sqrt{20} = \sqrt{4\times5} = 2\sqrt{5}$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-4-2\sqrt{5}}{2} = -2-\sqrt{5}$$
$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-4+2\sqrt{5}}{2} = -2+\sqrt{5}$$

En utilisant le changement de variable $X = e^x$, on en déduit l'unique solution de l'équation de départ :
$\mathcal{S} = \left\{\ln\left(-2+\sqrt{5}\right)\right\}$

Correction 6

a. On a les systèmes d'équations suivants :
$$\begin{cases} 2\cdot\ln x - 3\cdot\ln y = -11 \\ \ln x + \ln y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\cdot\ln x - 3\cdot\ln x = -11 \\ 2\cdot\ln x + 2\cdot\ln y = 4 \end{cases}$$

Par soustraction des deux équations de ce système :
$$-3\cdot\ln y - 2\cdot\ln y = -11-4$$
$$-5\cdot\ln y = -15$$
$$\ln y = \frac{-15}{-5}$$
$$\ln y = 3$$
$$e^{\ln y} = e^3$$
$$y = e^3$$
En reprenant la première équation de ce système :

$$2\cdot\ln x-3\cdot\ln y=-11$$
$$2\cdot\ln x-3\times3y=-11$$
$$2\cdot\ln x-9=-11$$
$$2\cdot\ln x=-2$$
$$\ln x=-1$$
$$x=\mathrm{e}^{-1}$$

Ainsi, ce système admet pour unique solution le couple $(\mathrm{e}^{-1}\,;\mathrm{e}^3)$.

b. On a les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases}\ln(2\cdot x+y)=0\\ \ln(x)+\ln(y)=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\ln(2\cdot x+y)=0\\ \ln(x\cdot y)=1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\mathrm{e}^{\ln(2\cdot x+y)}=\mathrm{e}^0\\ \mathrm{e}^{\ln(x\cdot y)}=\mathrm{e}^1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2\cdot x+y=1\\ x\cdot y=e\end{cases}$$

De la seconde équation, on en déduit que x est non-nul et peut s'écrire :

$$y=\frac{e}{x}$$

La première équation permet d'obtenir :

$$2\cdot x+y=1$$
$$2\cdot x+\frac{e}{x}=1$$

x étant non-nul, on a :

$$x\cdot\Big(2\cdot x+\frac{e}{x}\Big)=x\cdot1$$
$$2\cdot x^2+e=x$$
$$2\cdot x^2-x+e=0$$

Cette équation a pour discriminant :

$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-1)^2-4\times2\times e=1-8\cdot e$$

Le discriminant étant strictement négatif, on en déduit que cette équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$: ce système n'admet aucune solution.

Correction 7

1. Considérons l'inéquation :

$$\ln\big(x+1\big)\leqslant\ln\big(x^2+1\big)$$

La fonction exponentielle est croissante :

$$x+1\leqslant x^2+1$$
$$x+1-x^2-1\leqslant0$$
$$-x^2+x\leqslant0$$
$$x\cdot\big(1-x\big)\leqslant0$$

On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$1-x$		$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	
$x\cdot(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'inéquation (E) étant définie sur $\big]-1\,;+\infty\big[$, l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\big]-1\,;0\big]\cup\big[1\,;+\infty\big[$

2. Considérons l'inéquation :

$$\ln(4-2x)<\ln(x+3)$$

La fonction exponentielle est croissante :

$$4-2x<x+3$$
$$-2x<x+3-4$$
$$-2x<x-1$$
$$-2x-x<-1$$
$$-3x<-1$$
$$x>\frac{-1}{-3}$$
$$x>\frac{1}{3}$$

L'inéquation étant définie sur $\big]-3\,;2\big[$, l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\Big]\frac{1}{3}\,;2\Big[$

Correction 8

1. Puisque la demi-vie de la particule de type A est de 5730 ans, on doit avoir :

$$p(5730)=0{,}375$$
$$0{,}75\cdot\mathrm{e}^{-\lambda\cdot5730}=0{,}375$$
$$\mathrm{e}^{-5730\lambda}=\frac{0{,}375}{0{,}75}$$
$$\mathrm{e}^{-5730\lambda}=\frac{1}{2}$$
$$\ln\big(\mathrm{e}^{-5730\lambda}\big)=\ln\Big(\frac{1}{2}\Big)$$
$$-5730\lambda=\ln\Big(\frac{1}{2}\Big)$$
$$\lambda=\frac{\ln\Big(\frac{1}{2}\Big)}{-5730}$$
$$\lambda\approx12\times10^{-5}$$

2. 10 % des particules de départ représentent une quantité de 0,075. Ainsi, dans l'échantillon, il restera :

$$0{,}75-0{,}075=0{,}675$$

Résolvons l'équation suivante :

$$p(t)=0{,}675$$
$$0{,}75\cdot\mathrm{e}^{-\lambda\cdot t}=0{,}675$$
$$\mathrm{e}^{-\lambda\cdot t}=\frac{9}{10}$$
$$t=\frac{\ln\Big(\frac{9}{10}\Big)}{-12\times10^{-5}}$$
$$t\approx878$$

3. Résolvons l'équation :

$$p(t)=0{,}5$$
$$0{,}75\cdot\mathrm{e}^{-\lambda\cdot t}=0{,}5$$
$$\mathrm{e}^{-\lambda\cdot t}=\frac{2}{3}$$
$$-\lambda\cdot t=\ln\Big(\frac{2}{3}\Big)$$
$$t=\frac{\ln\Big(\frac{2}{3}\Big)}{-\lambda}$$
$$t=\frac{\ln\Big(\frac{2}{3}\Big)}{-12\times10^{-5}}$$
$$t\approx3379$$

Correction 9

a. Résolvons l'équation suivante :

$$5^n\geqslant2$$

La fonction logarithme est croissante :

$$\ln\big(5^n\big)\geqslant\ln\big(2\big)$$
$$n\cdot\ln(5)\geqslant\ln(2)$$

Le nombre $\ln5$ est strictement positif :

$$n\geqslant\frac{\ln(2)}{\ln(5)}$$

On a la valeur approchée : $\dfrac{\ln2}{\ln5}\approx0{,}4$.

On en déduit que les solutions de cette équation sont les

entiers n tels que :
$n \geqslant 1$

b. Transformons l'inéquation :
$0{,}1^n \geqslant 2$

La fonction logarithme est croissante :

$\ln\left(0{,}1^n\right) \geqslant \ln\left(2\right)$

$n\cdot \ln(0{,}1) \geqslant \ln(2)$

Le nombre $\ln 0{,}1$ est strictement négatif :

$$n \leqslant \frac{\ln(2)}{\ln(0{,}1)}$$

On a la valeur approchée suivante : $\dfrac{\ln(2)}{\ln(0{,}1)} \approx -0{,}3$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des entiers tels que :
$n \leqslant -1$

c. On a les transformations suivantes :
$\big(\ln 2\big)^n < \mathrm{e}^2$

La fonction logarithme est croissante :

$\ln\left[\big(\ln 2\big)^n\right] < \ln\left(\mathrm{e}^2\right)$

$n\cdot \ln\left[\ln(2)\right] < 2$

Le nombre $\ln\left[\ln(2)\right]$ est strictement négatif :

$$n > \frac{2}{\ln\left[\ln(2)\right]}$$

On a la valeur approchée : $\dfrac{2}{\ln\left[\ln(2)\right]} \approx -5{,}46$

Les solutions de cette équation sont les entiers n vérifiant :
$n \geqslant -5$

d. On a :

$\ln\left(2^n\right) - \ln\left(3^n\right) \leqslant 2$

$\ln\left(\dfrac{2^n}{3^n}\right) \leqslant 2$

$\ln\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right] \leqslant 2$

$n\cdot \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \leqslant 2$

Le nombre $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$ étant strictement négatif :

$$n \geqslant \frac{2}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}$$

De la valeur approchée : $\dfrac{2}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)} \approx -4{,}9$

On en déduit l'ensemble des entiers solutions de cette inéquation :
$n \geqslant -4$

Correction 10

1. a. Les termes de la suite $\left(u_n\right)$ géométrique de premier terme 5 et de raison $\dfrac{3}{2}$ admet pour expression :

$u_n = 5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

De l'encadrement $0\leqslant\dfrac{2}{3}<1$: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$

On en déduit la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$

b. Résolvons l'inéquation :

$u_n < 0{,}01$

$5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 0{,}01$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < \dfrac{0{,}01}{5}$

La fonction logarithme est croissante :

$\ln\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right] < \ln\left(\dfrac{0{,}01}{5}\right)$

$n\cdot \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) < \ln\left(\dfrac{0{,}01}{5}\right)$

Le nombre $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ est un nombre négatif :

$$n > \frac{\ln\left(\dfrac{0{,}01}{5}\right)}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}$$

De la valeur approchée : $\dfrac{\ln\left(\dfrac{0{,}01}{5}\right)}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)} \approx 15{,}33$

On en déduit l'ensemble des entiers naturel n solution de l'inéquation :
$n \geqslant 16$

2. a. La suite $\left(v_n\right)$ est géométrique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{4}{5}$. Ainsi, le terme de rang n de la suite $\left(v_n\right)$ admet l'expression :

$v_n = 2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

En remarquant la valeur de la différence :

$S_{n+1} - S_n = v_{n+1} = 2\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$

b. La suite $\left(v_n\right)$ étant géométrique de raison différent de 1, la formule de la somme des termes d'une suite géométrique permet d'écrire :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= 2\cdot\frac{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{4}{5}} = 2\cdot\frac{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{5}}$$

$$= 2\cdot\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right]\times 5 = 10\cdot\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right]$$

c. De l'encadrement $0\leqslant\dfrac{4}{5}<1$, on a la limite :

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$

On en déduit la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n = 10$

Ainsi, la suite est croissante et convergente vers 10. Ainsi, il existe un entier N tel que tous les termes de la suite de rang supérieur à N soient inclus dans $\left[9{,}9\,;10\right]$.

d. Résolvons l'inéquation :

$$S_n \geqslant 9{,}9$$
$$10\cdot\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right] \geqslant 9{,}9$$
$$1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \geqslant \frac{9{,}9}{10}$$
$$-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \geqslant \frac{9{,}9}{10}-1$$
$$-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \geqslant -0{,}01$$
$$\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \leqslant 0{,}01$$

La fonction logarithme est croissante :

$$\ln\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right] \leqslant \ln\left(0{,}01\right)$$
$$(n+1)\cdot\ln\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant \ln\left(0{,}01\right)$$

Le nombre $\ln\left(\frac{4}{5}\right)$ est strictement négatif :

$$n+1 \geqslant \frac{\ln\left(0{,}01\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}$$
$$n \geqslant \frac{\ln\left(0{,}01\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}-1$$

On a la valeur approchée : $\dfrac{\ln\left(0{,}01\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}-1 \approx 19{,}6$

Ainsi, les termes de la suite $\left(S_n\right)$ appartiennent à l'intervalle $\left[9{,}9\,;10\right]$ à partir du rang 20.

Correction 11

a. On a les transformations suivantes :

$$e^{2x}+2\cdot e^{x}-3=0$$
$$\left(e^{x}\right)^2+2\cdot e^{x}-3=0$$

En posant $X=e^{x}$, on a :

$$X^2+2X-3=0$$

Etudions le polynôme X^2+2X-3 du seconde degré ; son discriminant a pour valeur :

$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=2^2-4\times1\times(-3)=4+12=16$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{16}=4$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet deux racines :

$$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-4}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$
$$X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Cherchons les x vérifiants :

$e^{x_1}=X_1$	$e^{x_2}=X_2$
$e^{x_1}=-3$	$e^{x_2}=1$
Pas de solution	$e^{x_2}=e^0$
	$x_2=0$

Cette équation admet une unique solution : $\mathcal{S}=\{0\}$

b. On a :

$$e^{2x}+e^{x}-2<0$$
$$\left(e^{x}\right)^2+e^{x}-2<0$$

Par le changement de variable : $X=e^{x}$:

$$X^2+X-2<0$$

Etudions le polynôme X^2+X-2 qui admet pour discriminant :

$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=1^2-4\times1\times(-2)=1+8=9$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant est strictement positif ; ce polynôme admet deux racines :

$$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$
$$X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

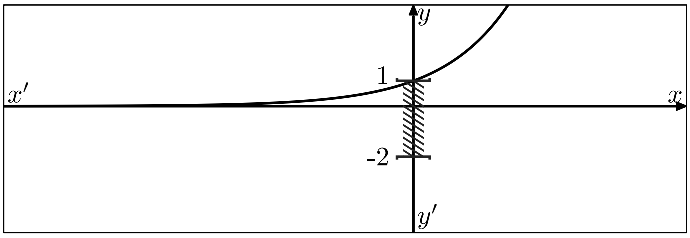
Le coefficient du second degré de ce polynôme est strictement positif ; on en déduit le tableau de signes suivant :

X	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
X^2+X-2		$+$	0	$-$		$+$	

Ainsi, l'inéquation $X^2+X-2<0$ a pour solution :

$\mathcal{S}'=\left]-2\,;1\right[$

L'ensemble des x vérifiant la relation $e^{x}\in\mathcal{S}'$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation.



Plus précisément : $\mathcal{S}=\left]-\infty\,;0\right[$

Correction 12

On a la transformation algébrique :

$$2\cdot e^{2\cdot x}+6\cdot e^{x}-8<0$$
$$2\cdot\left(e^{x}\right)^2+6\cdot e^{x}-8<0$$

Posons le changement de variable $X=e^{x}$:

$$2\cdot X^2+6\cdot X-8<0$$

Le polynôme du second degré du membre de gauche a pour discriminant :

$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=6^2-4\times2\times(-8)=36+64=100$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{100}=10$

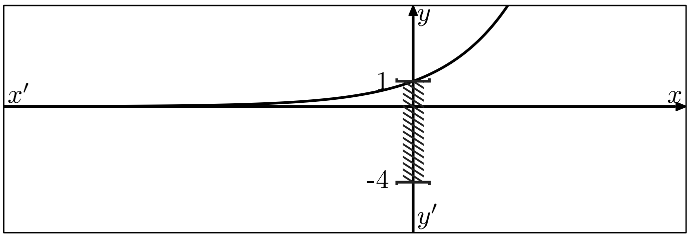
Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racnes suivantes :

$X_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$	$X_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$
$X_1=\dfrac{-6-10}{2\times2}$	$X_2=\dfrac{-6+10}{2\times2}$
$X_1=\dfrac{-16}{4}$	$X_2=\dfrac{4}{4}$
$X_1=-4$	$X_2=1$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on a le tableau de signes :

X	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$2{\cdot}X^2+6{\cdot}X-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'équation soit vérifiée, il faut que :
$X\in\left]-4\,;1\right[\implies \mathrm{e}^x\in\left]-4\,;1\right[\implies -4<\mathrm{e}^x<1$
Voici la courbe représentative de la fonction exponentielle :



On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S}=\left]-\infty\,;0\right[$

Correction 13

a. Etudions sur $\mathbb{R}$ le signe du numérateur et du dénominateur de ce quotient :

- La fonction exponentielle est strictement positive. Le numérateur est strictement positif comme somme de termes strictement positif.
- Résolvons l'inéquation :
$\mathrm{e}^x-1>0$
$\mathrm{e}^x>\mathrm{e}^0$
$x>0$

On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x+3		$+$	|	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$\dfrac{\mathrm{e}^x+3}{\mathrm{e}^x-1}$		$-$	||	$+$	

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\left]0\,;+\infty\right[$.

b. On a la transformation algébrique :
$-\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+2>0$
$-\left(\mathrm{e}^x\right)^2-\mathrm{e}^x+2>0$
Effectuons le changement de variable $X=\mathrm{e}^x$. L'inéquation devient :
$-X^2-X+2>0$
Le polynôme du second degré du membre de gauche a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-1)^2-4\times(-1)\times2=1+8=9$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

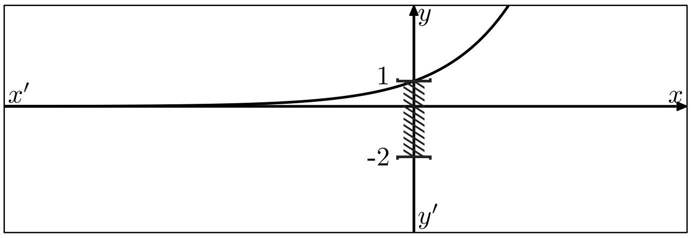
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-1)-3}{2\times(-1)}=\frac{-2}{-2}=1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-1)+3}{2\times(-1)}=\frac{4}{-2}=-2$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on a le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-X^2-X+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, pour être solution de l'équation, on doit avoir :
$X\in\left]-2\,;1\right[\implies \mathrm{e}^x\in\left]-2\,;1\right[$

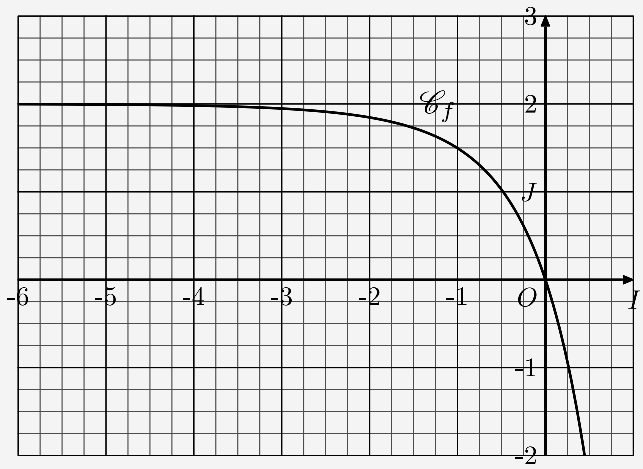


D'après la représentation graphique de la fonction exponentielle, on en déduit :
$\mathcal{S}=\left]-\infty\,;0\right[$

Vérification graphique :

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x)=-\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+2$

Voici la représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$:



Correction 14

1. Un quotient n'est défini que si son dénominateur ne s'annule pas.

Considérons l'expression :
$\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1=0$
$\left(\mathrm{e}^x\right)^2-\mathrm{e}^x+1=0$
Par le changement de variable $X=\mathrm{e}^x$, on a :
$X^2-X+1=0$
Le polynôme X^2-X+1 admet pour discriminant admet :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine. Ainsi, l'équation du second degré n'admet aucune solution : on en déduit que le dénominateur du quotient définissant la fonction f ne s'annule jamais :
$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

2. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient de la fonction u par la fonction v donne :
$u(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x \quad ; \quad v(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1$
qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 4e^{2x} - e^x \quad ; \quad v'(x) = 2e^{2x} - e^x$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{\big(4e^{2x} - e^x\big)\big(e^{2x} - e^x + 1\big) - \big(2e^{2x} - e^x\big)\big(2e^{2x} - e^x\big)}{\big(e^{2x} - e^x + 1\big)^2}$$

$$= \frac{\big(4e^{4x}\text{-}4e^{3x}+4e^{2x}\text{-}e^{3x}+e^{2x}\text{-}e^x\big)\text{-}\big(4e^{4x}\text{-}2e^{3x}\text{-}2e^{3x}+e^{2x}\big)}{\big(e^{2x}\text{-}e^x+1\big)^2}$$

$$= \frac{\big(4e^{4x} - 5e^{3x} + 5e^{2x} - e^x\big) - \big(4e^{4x} - 4e^{3x} + e^{2x}\big)}{\big(e^{2x} - e^x + 1\big)^2}$$

$$= \frac{4e^{4x} - 5e^{3x} + 5e^{2x} - e^x - 4e^{4x} + 4e^{3x} - e^{2x}}{\big(e^{2x} - e^x + 1\big)^2}$$

$$= \frac{-e^{3x} + 4e^{2x} - e^x}{\big(e^{2x} - e^x + 1\big)^2} = \frac{-e^x\cdot\big(e^{2x} - 4e^x + 1\big)}{\big(e^{2x} - e^x + 1\big)^2}$$

3. a. Le polynôme x^2-4x+1 admet pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-4)^2 - 4\times1\times1 = 16 - 4 = 12$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-4) - 2\sqrt{3}}{2\times1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-4) + 2\sqrt{3}}{2\times1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2 - 4x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Pour étudier le signe de la fonction f', on effectue les remarques suivantes :

- $-e^x$ est négatif sur $\mathbb{R}$;
- $\big(e^{2x}-e^x+1\big)^2$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, le signe de la fonction f' dépend du facteur $\big(e^{2x}-4e^x+1\big)$. Résolvons l'inéquation suivante :

$$e^{2x} - 4e^x + 1 < 0$$

$$\big(e^x\big)^2 - 4e^x + 1 < 0$$

Effectuons le changement de variable : $X = e^x$:

$$X^2 - 4X + 1 < 0$$

D'après le tableau de signes de la question précédente, on obtient l'encadrement de la variable X :

$$2 - \sqrt{3} < \quad X \quad < 2 + \sqrt{3}$$

$$0 < 2 - \sqrt{3} < \quad e^x \quad < 2 + \sqrt{3}$$

La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\big(2-\sqrt{3}\big) < \ln\big(e^x\big) < \ln\big(2+\sqrt{3}\big)$$

$$\ln\big(2-\sqrt{3}\big) < \quad x \quad < \ln\big(2+\sqrt{3}\big)$$

Ainsi, on en déduit que le facteur $\big(e^{2x}-4e^x+1\big)$ est strictement négatif sur l'intervalle :

$\Big]\ln\big(2-\sqrt{3}\big) ; \ln\big(2+\sqrt{3}\big)\Big[$.

Ainsi, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\ln\big(2-\sqrt{3}\big)$		$\ln\big(2+\sqrt{3}\big)$		$+\infty$
$-e^x$		$-$		$-$		$-$	
$e^{2x}-4e^x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. a. Déterminons les deux limites demandées :

- On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} 2e^{2x} - e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} e^{2x} - e^x + 1 = 1$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = 0$$

- On a la transformation algébrique suivante :

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{e^{2x}\cdot\big(2 - e^{-x}\big)}{e^{2x}\cdot\big(1 - e^{-x} + e^{-2x}\big)}$$

$$= \frac{2 - e^{-x}}{1 - e^{-x} + e^{-2x}}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} 2 - e^{-x} = 2 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} 1 - e^{-x} + e^{-2x} = 1$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{2 - e^{-x}}{1 - e^{-x} + e^{-2x}} = \frac{2}{1} = 2$$

b. On a les valeurs approchées suivantes :

$$f\Big[\ln\big(2-\sqrt{3}\big)\Big] \approx -0{,}15 \quad ; \quad f\Big[\ln\big(2+\sqrt{3}\big)\Big] \approx 2{,}15$$

On a le tableau de variations suivant :

x	-∞	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$
Variation de f	0 ↘	$-0{,}15$ ↗	$2{,}15$ ↘	2