Exercices sur les suites arithmético-géométriques

Exercice 1 :

Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population. Compte tenu des naissances et des décès, on a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille.
De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5 000 le quitte.
En 2010, la population de ce pays était de 75 millions d'habitants. On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.
On note P_n la population de l'année (2010 + *n*) exprimée en milliers d'habitants.

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite. Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? justifier votre réponse.
2) Donner la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n .
3) On donne $U_n = P_n + 500$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique.
4) Donner la formule explicite de c.
5) En déduire la formule explicite de P_n.
6) Combien d'habitants peut-on prévoir en 2015 ?
7) Au bout de combien d'années la population aura-t-telle doublée ?

Exercice 2 :

Le 1er janvier 2013, une grande entreprise compte 1500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif de l'entreprise au 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Pour tout entier naturel *n,* on appelle U_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année (2013 + *n*)

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite. Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? Justifier votre réponse.
2) Donner la relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n.
3) Pour tout entier naturel *n*, on pose $V_n = U_n - 1000$. Démontrer alors que la suite (V_n) est géométrique.
4) En déduire l'expression (V_n) de puis (U_n) celle de en fonction de *n*.
5) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $U_{n+1} - U_n = -50 \times 0,9^n$.
   En déduire alors le sens de variation de la suite (U_n).
6) Au 1er janvier 2013, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés.
   A partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-telle plus en sureffectif ?

Exercice 3 :

Une association caritative a constaté que chaque année, 20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.
Lors de la première année de l'étude, l'association comptait 1 000 donateurs. On note U_n le nombre de donateurs lors de la *n-ième* année ; ainsi $U_1 = 1000$.

1) Calculer alors U_2 et U_3.
2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = 0,8 \times U_n + 300$
3) Pour tout entier naturel *n*, on pose $V_n = 1500 - U_n$. Démontrer alors que la suite (V_n) est géométrique. Précisez alors son premier terme et sa raison.
4) En déduire l'expression de U_n en fonction de *n*.
5) Après avoir factorisé l'expression $U_{n+1} - U_n$, en déduire le sens de variation de la suite (U_n).

6) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Au bout de combien d'années, le contexte restant le même, le nombre de donateurs dépassera-t-il 1 500?

Exercice 4 : Antilles Guyane Septembre 2011 :
Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après midi à partir du 1er septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.
Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5% des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.
Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.
La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation.
On note U_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $U_0 = 80$.
Pour tout entier naturel *n*, on note *n u* le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de *n* semaines.

1. Montrer que $U_1 = 86$.

2. Pour tout entier naturel *n*, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

3. Pour tout entier naturel *n*, on pose $a_n = U_n - 200$.

a. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Pour tout entier naturel *n*, exprimer a_n en fonction de *n*.

c. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, on a : $U_n = 200 - 120 \times 0,95^n$.

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel *n*, on a: $U_{n+1} - U_n = 6 \times 0,95^n$.

b. En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?

Exercice 5 :
On considère une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = 2U_n - 3$.
Soit la suite (V_n) définie sur N par : $V_n = U_n - 3$.

1) Quelle est la nature de la suite (U_n).
2) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.
3) Donner l'expression de V_n en fonction de *n*.
4) En déduire l'expression de U_n en fonction de *n*.
5) Calculer la somme des 11 premiers termes de (U_n).