CORRIGE

Exercice 1 :

Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population. Compte tenu des naissances et des décès, on a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille.
De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5 000 le quitte.
En 2010, la population de ce pays était de 75 millions d'habitants. On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.
On note P_n la population de l'année (2010 + *n*) exprimée en milliers d'habitants.

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite. Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? justifier votre réponse.

$$P_0 = 75\,000$$

Un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille correspond à un coefficient multiplicateur égal à $1{,}014$, donc :

$$P_1 = P_0 \times 1{,}014 + 12 - 5 = 75\,000 \times 1{,}014 + 7 = 76\,057$$

$$P_2 = P_1 \times 1{,}014 + 7 = 76\,057 \times 1{,}014 + 7 = 77\,128{,}798$$

$P_1 - P_0 = 76\,057 - 75\,000 = 1\,057$ et $P_2 - P_1 = 77\,128{,}798 - 76\,057 = 1\,071{,}798$

→cette suite n'est pas arithmétique

$\dfrac{P_1}{P_0} = \dfrac{76\,057}{75\,000} \simeq 1{,}0140933$ et $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{77\,128{,}798}{76\,057} \simeq 1{,}014092$

→cette suite n'est pas géométrique

2) Donner la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n .

$$P_{n+1} = P_n \times 1{,}014 + 7$$

3) On donne $U_n = P_n + 500$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique.

$$U_{n+1} = P_{n+1} + 500 = P_n \times 1{,}014 + 7 + 500 = P_n \times 1{,}014 + 507 = 1{,}014\left(P_n + \frac{507}{1{,}014}\right)$$

$$= 1{,}014(P_n + 500) = 1{,}014 U_n$$

donc (U_n) est une suite géométrique de raison $1{,}014$, de premier terme $U_0 = P_0 + 500 = 75\,500$

4) Donner la formule explicite de U_n .

$$U_n = U_0 \times q^n = 75\,500 \times 1{,}014^n$$

5) En déduire la formule explicite de P_n .

$U_n = P_n + 500$ donc $P_n = U_n - 500 = 75\,500 \times 1{,}014^n - 500$

6) Combien d'habitants peut-on prévoir en 2015 ?

$P_5 = 75\,500 \times 1{,}014^5 - 500 \simeq 86\,435{,}066$, soit 86 435 066 habitants.

7) Au bout de combien d'années la population aura-t-telle doublée ?

On cherche le plus petit entier N tel que $U_N \geq 2U_0$

→avec la calculatrice, saisir la fonction associée puis déf-table puis table :

On trouve N = 50 : au bout de 50 ans

Exercice 2 :

Le 1er janvier 2013, une grande entreprise compte 1500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif de l'entreprise au 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Pour tout entier naturel *n,* on appelle U_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année (2013 + *n*)

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite. Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? Justifier votre réponse.

Une baisse annuelle de 10% correspond à un coefficient multiplicateur égal à $0,9$, donc :

$U_0 = 1500$

$U_1 = U_0 \times 0,9 + 100 = 1500 \times 0,9 + 100 = 1350 + 100 = 1450$

$U_2 = U_1 \times 0,9 + 100 = 1450 \times 0,9 + 100 = 1305 + 100 = 1405$

$\dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{1450}{1500} \simeq 0,97$ et $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{1405}{1450} \simeq 0,94$: cette suite n'est pas géométrique

$U_1 - U_0 = 1450 - 1500 = -50$ et $U_2 - U_1 = 1405 - 1450 = -45$: elle n'est pas arithmétique

2) Donner la relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n.

$U_{n+1} = U_n \times 0,9 + 100$

3) Pour tout entier naturel *n*, on pose $V_n = U_n - 1000$. Démontrer alors que la suite (V_n) est géométrique.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 1000 = U_n \times 0,9 + 100 - 1000 = U_n \times 0,9 - 900 = 0,9\left(U_n - \frac{900}{0,9}\right) = 0,9(U_n - 1000)$$
$$= 0,9 \times V_n$$

donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,9 , de premier terme $V_0 = U_0 - 1000 = 500$

4) En déduire l'expression (V_n) de puis (U_n) celle de en fonction de *n*.

$V_n = V_0 \times q^n = 500 \times 0,9^n$

$V_n = U_n - 1000$ donc $U_n = V_n + 1000 = 500 \times 0,9^n + 1000$

5) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $U_{n+1} - U_n = -50 \times 0,9^n$.

En déduire alors le sens de variation de la suite (U_n).

$$U_{n+1} - U_n = \left(500 \times 0,9^{n+1} + 1000\right) - \left(500 \times 0,9^n + 1000\right) = 500 \times 0,9^{n+1} + 1000 - 500 \times 0,9^n - 1000$$
$$= 500 \times 0,9^{n+1} - 500 \times 0,9^n = 500 \times \left(0,9^{n+1} - 0,9^n\right) = 500 \times \left(0,9 \times 0,9^n - 1 \times 0,9^n\right)$$
$$= 500 \times 0,9^n \times (0,9 - 1) = 500 \times 0,9^n \times (-0,1) = -50 \times 0,9^n$$

$U_{n+1} - U_n < 0$ donc la suite (U_n) est décroissante.

6) Au 1er janvier 2013, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés, ce qui signifie courtoisement que l'entreprise veut supprimer 300 postes.
A partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-telle plus en sureffectif ?

On cherche donc à partir de quel rang n le nombre de salariés devient inférieur à 1200, soit :

$U_n < 1200$

$500 \times 0,9^n + 1000 < 1200$

$500 \times 0,9^n < 200$

$0,9^n < \dfrac{200}{500}$

$0,9^n < 0,4$ → on trouve n = 9 : au bout de 9 ans

Autre méthode : définir une suite numérique avec la calculatrice

Autre méthode : définir un programme Algobox ou avec la calculatrice

AlgoBox : sanstitre

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  U PREND_LA_VALEUR 1500
  n PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (U>1200) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    U PREND_LA_VALEUR U*0.9+100
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Le nombre d'années cherché est : "
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

Résultats

```
***Algorithme lancé***
Le nombre d'années cherché est : 9
***Algorithme terminé***
```

Exercice 3 :

Une association caritative a constaté que chaque année, 20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.

Lors de la première année de l'étude, l'association comptait 1 000 donateurs. On note U_n le nombre de donateurs lors de la *n-ième* année ; ainsi $U_1 = 1000$.

1) Calculer alors U_2 et U_3.

   Une baisse annuelle de 20% correspond à un coefficient multiplicateur égal à $0,8$, donc :

   $U_2 = U_1 \times 0,8 + 300 = 1000 \times 0,8 + 300 = 800 + 300 = 1100$

   $U_2 = U_2 \times 0,8 + 300 = 1100 \times 0,8 + 300 = 880 + 300 = 1180$

2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = 0,8 \times U_n + 300$

   En généralisant les explications ci-dessus : $U_{n+1} = 0,8 \times U_n + 300$

3) Pour tout entier naturel *n*, on pose $V_n = 1500 - U_n$. Démontrer alors que la suite (V_n) est géométrique. Précisez alors son premier terme et sa raison.

   $$V_{n+1} = 1500 - U_{n+1} = 1500 - (0,8 \times U_n + 300) = 1500 - 0,8 \times U_n - 300 = 1200 - 0,8 \times U_n$$
   $$= 0,8\left(\frac{1200}{0,8} - U_n\right) = 0,8(1500 - U_n) = 0,8 \times V_n$$

   donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,8 , de premier terme $V_1 = 1500 - U_1 = 500$

   $$V_n = V_1 \times q^{n-1} = 500 \times 0,8^{n-1}$$

4) En déduire l'expression de U_n en fonction de *n*.

   $V_n = 1500 - U_n$ donc $U_n = 1500 - V_n = 1500 - 500 \times 0,8^{n-1}$

5) Après avoir factorisé l'expression $U_{n+1} - U_n$, en déduire le sens de variation de la suite (U_n).

   $$U_{n+1} - U_n = \left(1500 - 500 \times 0,8^n\right) - \left(1500 - 500 \times 0,8^{n-1}\right) = 1500 - 500 \times 0,8^n - 1500 + 500 \times 0,8^{n-1}$$
   $$= -500 \times 0,8^n + 500 \times 0,8^{n-1} = 500 \times \left(-0,8^n + 0,8^{n-1}\right) = 500 \times \left(0,8^{n-1} \times (-0,8) + 0,8^{n-1} \times 1\right)$$
   $$= 500 \times 0,8^{n-1} \times (-0,8 + 1) = 500 \times 0,8^{n-1} \times 0,2 = 100 \times 0,8^{n-1}$$

$U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite (U_n) est croissante.

6) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Au bout de combien d'années, le contexte restant le même, le nombre de donateurs dépassera-t-il 1 500?

Le programme attendu ne marche pas et une vérification avec la calculatrice montre que le nombre de donateurs ne dépassera jamais 1500.
D'où une petite ruse dans le programme ci-dessous : à quel moment le nombre de donateurs sera-t-il supérieur à 1499 ! Tout simplement !

AlgoBox : sanstitre

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 1
  u PREND_LA_VALEUR 1000
  TANT_QUE (u<=1499) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    u PREND_LA_VALEUR 0.8*u+300
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

Résultats

```
***Algorithme lancé***
29
***Algorithme terminé***
```

Exercice 4 : Antilles Guyane Septembre 2011 :

Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après midi à partir du 1er septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.
Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5% des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.
Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.
La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation.
On note U_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $U_0 = 80$.
Pour tout entier naturel *n*, on note *n u* le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de *n* semaines.

1. Montrer que $U_1 = 86$.

Une baisse de 5% des réinscriptions correspond à un coefficient multiplicateur $k = 0{,}95$.
Ainsi : $U_1 = 0{,}95 \times U_0 + 10 = 0{,}95 \times 80 + 10 = 86$

2. Pour tout entier naturel *n*, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

En généralisant la première étape avec ce coefficient multiplicateur, on obtient :

$$U_{n+1} = 0{,}95 \times U_n + 10$$

3. Pour tout entier naturel *n*, on pose $a_n = U_n - 200$.

a. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

$$a_{n+1} = U_{n+1} - 200 = 0,95 \times U_n + 10 - 200 = 0,95 \times U_n - 190 = 0,95\left(U_n - \frac{190}{0,95}\right)$$

$$a_{n+1} = 0,95(U_n - 200) = 0,95 \times a_n$$

Ainsi (a_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$, de 1er terme $a_0 = U_0 - 200 = -120$

b. Pour tout entier naturel n, exprimer a_n en fonction de n.

$$a_n = a_0 \times q^n = -120 \times 0,95^n$$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n = 200 - 120 \times 0,95^n$.

$$a_n = U_n - 200 \quad \text{donc} \quad U_n = a_n + 200 = -120 \times 0,95^n + 200$$

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a: $U_{n+1} - U_n = 6 \times 0,95^n$.

$$U_{n+1} - U_n = \left(200 - 120 \times 0,95^{n+1}\right) - \left(200 - 120 \times 0,95^n\right)$$

$$= 200 - 120 \times 0,95^{n+1} - 200 + 120 \times 0,95^n = 120 \times 0,95^n - 120 \times 0,95^{n+1}$$

$$= 120 \times \left(0,95^n - 0,95^{n+1}\right) = 120 \times \left(0,95^n \times 1 - 0,95^n \times 0,95\right)$$

$$= 120 \times 0,95^n \times (1 - 0,95) = 120 \times 0,95^n \times 0,05 = 6 \times 0,95^n$$

b. En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.

$6 \times 0,95^n > 0$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$: la suite (U_n) est croissante et le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?

On cherche pour quelle valeur n la suite (U_n) dépassera 150 :

→A la calculatrice, on trouve n = 18 , soit à partir de 18 semaines.

Avec Algobox :

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  U PREND_LA_VALEUR 80
  n PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (U<150) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    U PREND_LA_VALEUR 0.95*U+10
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Le nombre de mois cherché est : "
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

Résultats

```
***Algorithme lancé***
Le nombre de mois cherché est : 18
***Algorithme terminé***
```

Exercice 5 :

On considère une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = 2U_n - 3$.

Soit la suite (V_n) définie sur N par : $V_n = U_n - 3$.

1) Quelle est la nature de la suite (U_n).

(U_n) est une suite arithmético-géométrique.

2) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.

$V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = 2U_n - 3 - 3 = 2U_n - 6 = 2(U_n - 3) = 2 \times V_n$

La suite (V_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 3 = 1$.

3) Donner l'expression de V_n en fonction de *n*.

$V_n = V_0 \times q^n = 1 \times 2^n = 2^n$

4) En déduire l'expression de U_n en fonction de *n*.

$V_n = U_n - 3$ donc $U_n = V_n + 3 = 2^n + 3$

5) Calculer la somme des 11 premiers termes de (U_n).

$$\begin{aligned} U_0 + U_1 + \ldots + U_{10} &= (V_0 + 3) + (V_1 + 3) + \ldots + (V_{10} + 3) = V_0 + V_1 + \ldots + V_{10} + 11 \times 3 \\ &= V_0 \times \frac{1 - q^{nombre\,de\,termes}}{1 - q} + 11 \times 3 \\ &= 1 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} + 33 = \frac{1 - 2^{11}}{-1} + 33 = 2^{11} - 1 + 33 = 2080 \end{aligned}$$

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  U PREND_LA_VALEUR 4
  S PREND_LA_VALEUR 4
  n PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (n<11) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    U PREND_LA_VALEUR 2*U-3
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    S PREND_LA_VALEUR S+U
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Le nombre de mois cherché est : "
  AFFICHER n
  AFFICHER "La somme cherchée est : "
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

Résultats

```
***Algorithme lancé***
Le nombre de mois cherché est : 11
La somme cherchée est : 2080
***Algorithme terminé***
```