Terminale spécialité
Chapitre 1 les suites

Correction des exercices du livre

1) Le raisonnement par récurrence

7 Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est la propriété :
« $v_n = n(n+1)$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $v_0 = 0$ et $0(0+1) = 0$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $v_k = k(k+1)$ (hypothèse de récurrence).

Or $v_{k+1} = v_k + 2k + 2$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $v_{k+1} = k(k+1) + 2k + 2$

d'où $v_{k+1} = (k+1)(k+2)$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n , $v_n = n(n+1)$.

8 Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est la propriété :
« $w_n = 3(1-2^n)$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $w_0 = 0$ et $3(1-2^0) = 0$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $w_k = 3(1-2^k)$ (hypothèse de récurrence).

Or $w_{k+1} = 2w_k - 3$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $w_{k+1} = 2 \times 3(1-2^k) - 3$

d'où $w_{k+1} = 3(2-2^{k+1}-1) = 3(1-2^{k+1})$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n , $w_n = 3(1-2^n)$.

36 a) Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $0 \leq 0 \leq 2$. Donc la propriété $P(0)$ est vraie.

b) On suppose que pour un nombre entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leq u_k \leq 2$. Ainsi $0 \leq u_k + 2 \leq 4$. Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, on a $0 \leq \sqrt{u_k + 2} \leq 2$ soit $0 \leq u_{k+1} \leq 2$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

c) Ainsi, la propriété est vraie initialement et est héréditaire. Donc pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$ est vraie soit $0 \leq u_n \leq 2$.

37 a) On suppose que pour un nombre entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $4^k + 1$ est un multiple de 3.

Ainsi, il existe un entier naturel p tel que $4^k + 1 = 3p$.

Or $4^{k+1} + 1 = 4 \times 4^k + 1$

donc $4^{k+1} + 1 = 4(3p-1) + 1 = 3(4p-1)$.

Ainsi $4^{k+1} + 1$ est un multiple de 3.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

b) Pour $n = 0$, $4^0 + 1 = 2$ qui n'est pas un multiple de 3. Donc la propriété $P(0)$ n'est pas vraie.

c) Ainsi, la propriété est héréditaire mais n'est pas vraie initialement. Donc on ne peut pas affirmer que pour tout entier naturel n , $4^n + 1$ est un multiple de 3.

38 a) Si u_k est pair alors il existe un entier naturel p tel que $u_k = 2p$.

Or $u_{k+1} = u_k + 6k$ donc $u_{k+1} = 2p + 6k = 2(p+3k)$.

Ainsi u_{k+1} est pair.

b) Si u_k est un multiple de 3 alors il existe un entier naturel p tel que $u_k = 3p$.

Or $u_{k+1} = u_k + 6k$ donc $u_{k+1} = 3p + 6k = 3(p+2k)$.

Ainsi u_{k+1} est un multiple de 3.

c) Les propriétés sont héréditaires. Elles seront vraies pour tout entier naturel n si elles sont vraies initialement. Ainsi les termes de la suite (u_n) sont :

• pairs si u_0 est pair ;

• des multiples de 3 si u_0 est un multiple de 3.

39 Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est la propriété :

« $u_n = 70 \times 1,14^n + 50$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 120$

et $70 \times 1,14^0 + 50 = 120$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$u_k = 70 \times 1,14^k + 50$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = 1,14 \times u_k - 7$

donc $u_{k+1} = 1,14 \times (70 \times 1,14^k + 50) - 7$.

On en déduit que $u_{k+1} = 70 \times 1,14^{k+1} + 50$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n , $u_n = 70 \times 1,14^n + 50$.

40 Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est la propriété :

« $v_n = n^2 + n - 1$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $v_0 = -1$ et $0^2 + 0 - 1 = -1$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$v_k = k^2 + k - 1$ (hypothèse de récurrence).

Or $v_{k+1} = v_k + 2k + 2$

donc $v_{k+1} = k^2 + k - 1 + 2k + 2$.

On en déduit que $v_{k+1} = k^2 + 3k + 1$.

Or $(k+1)^2 + (k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 + k + 1 - 1 = k^2 + 3k + 1$.

D'où $(k+1)^2 + (k+1) - 1 = k^2 + 3k + 1$.

On en déduit que $v_{k+1} = (k+1)^2 + (k+1) - 1$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n , $v_n = n^2 + n - 1$.

41 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $P(n)$ est la propriété :

« $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 1$, $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.

La propriété $P(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geq 1$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

(hypothèse de récurrence). Or :

$1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) = 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1)$.

Donc $1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$.

On en déduit que

$1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$,

soit $1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geq 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

42 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $P(n)$ est la propriété :

« $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 1$,

$$\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = 1.$$

La propriété $P(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geq 1$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

(hypothèse de récurrence). Or :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2$

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2$.

Donc $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

On en déduit que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$

soit $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}.$$

C'est-à-dire $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2$

$$= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6}.$$

Or $k(2k+1) + 6(k+1) = 2k^2 + 7k + 6$ et

$(k+2)(2(k+1)+1) = (k+2)(2k+3) = 2k^2 + 7k + 6$.

Ainsi $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geq 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

43 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $P(n)$ est la propriété :

« $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 1$, $1 = 1^2$.

La propriété $P(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geq 1$, la propriété $P(k)$ est vraie

c'est-à-dire que $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$

(hypothèse de récurrence).

Or $1 + 3 + 5 + \dots + (2(k+1)-1)$

$= 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1)$.

Donc $1 + 3 + 5 + \dots + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 1$.

On en déduit que

$1 + 3 + 5 + \dots + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geq 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.

44 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $P(n)$ est la propriété: « $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 1$, $\frac{1}{3} \times 1 \times (4 \times 1^2 - 1) = 1$ et $1^2 = 1$.

La propriété $P(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geq 1$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{1}{3}k(4k^2 - 1)$$

(hypothèse de récurrence).

$$\begin{aligned} \text{Or } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2(k+1)-1)^2 \\ = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + (2(k+1)-1)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2(k+1)-1)^2 \\ = \frac{1}{3}k(4k^2 - 1) + (2k+1)^2 \\ = \frac{1}{3}(k(4k^2 - 1) + 3(2k+1)^2) \\ = \frac{1}{3}(4k^3 - k + 3(4k^2 + 4k + 1)) \\ = \frac{1}{3}(4k^3 + 12k^2 + 11k + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, } \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2 - 1) \\ = \frac{1}{3}(k+1)(4k^2 + 8k + 3) \\ = \frac{1}{3}(4k^3 + 8k^2 + 3k + 4k^2 + 8k + 3) \\ = \frac{1}{3}(4k^3 + 12k^2 + 11k + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2(k+1)-1)^2 \\ = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2 - 1). \end{aligned}$$

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geq 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$.

45 Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $P(n)$ est la propriété :

$$\left\langle \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \right\rangle.$$

• **Initialisation** : pour $n = 2$,

$$1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \times 2}.$$

La propriété $P(2)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geq 2$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

(hypothèse de récurrence).

$$\begin{aligned} \text{Or } \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\ = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\ = \frac{k+1}{2k} \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{k+1}{2k} \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k} \times \frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2}.$$

$$\text{Donc } \frac{k+1}{2k} \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{(k+1)^2 - 1}{2k(k+1)}.$$

$$\text{D'où } \frac{k+1}{2k} \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k(k+2)}{2k(k+1)}$$

$$\text{soit } \frac{k+1}{2k} \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

Ainsi

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geq 2$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

49 Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est la propriété : « $4^n - 1$ est divisible par 3 ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $4^0 - 1 = 0$ est divisible par 3.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $4^k - 1$ est divisible par 3 (hypothèse de récurrence).

Donc, il existe un entier naturel p tel que $4^k - 1 = 3p$.

$$\text{Or } 4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1.$$

$$\text{Donc } 4^{k+1} - 1 = 4 \times (3p + 1) - 1 = 3(4p + 1).$$

Ainsi $4^{k+1} - 1$ est divisible par 3.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n , $4^n - 1$ est divisible par 3.

51 Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est la propriété : « $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11 ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $7 \times 3^{5 \times 0} + 4 = 11$ est divisible par 11.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $7 \times 3^{5k} + 4$ est divisible par 11 (hypothèse de récurrence).

Donc, il existe un entier naturel p tel que $7 \times 3^{5k} + 4 = 11p$.

Or $7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 3^5 \times 7 \times 3^{5k} + 4$.

Donc $7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 3^5(11p - 4) + 4$.

D'où $7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 11 \times (3^5 p - 88)$.

Ainsi $7 \times 3^{5(k+1)} + 4$ est divisible par 11.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n , $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

50 Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est la propriété : « $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9 ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $4^0 - 1 - 3 \times 0 = 0$ est divisible par 9.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $4^k - 1 - 3k$ est divisible par 9 (hypothèse de récurrence).

Donc, il existe un entier naturel p tel que $4^k - 1 - 3k = 9p$.

Or $4^{k+1} - 1 - 3(k+1) = 4 \times 4^k - 3k - 4$.

Donc $4^{k+1} - 1 - 3(k+1) = 4 \times (9p + 1 + 3k) - 3k - 4$.

D'où $4^{k+1} - 1 - 3(k+1) = 9(4p + k)$.

Ainsi $4^{k+1} - 1 - 3(k+1)$ est divisible par 9.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n , $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.

53 Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est la propriété : « $OA_n = \sqrt{4n+1}$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $OA_0 = 1$ et $\sqrt{4 \times 0 + 1} = 1$. La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $OA_k = \sqrt{4k+1}$ (hypothèse de récurrence).

Dans le triangle $OA_k A_{k+1}$ rectangle en A_k , le théorème de Pythagore donne : $OA_{k+1}^2 = OA_k^2 + 2^2$.

Donc $OA_{k+1}^2 = 4k + 1 + 4 = 4(k+1) + 1$.

Ainsi $OA_{k+1} = \sqrt{4(k+1) + 1}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n , $OA_n = \sqrt{4n+1}$.

54 a) Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est la propriété : « $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 280$ et $-140 \times 0,9^0 + 420 = 280$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = -140 \times 0,9^k + 420$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = 0,9u_k + 42$

donc $u_{k+1} = 0,9(-140 \times 0,9^k + 420) + 42$.

On en déduit que $u_{k+1} = -140 \times 0,9^{k+1} + 378 + 42$, soit $u_{k+1} = -140 \times 0,9^{k+1} + 420$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n , $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.

b) À l'aide de la calculatrice, on trouve $u_{18} \approx 399$ et $u_{19} \approx 401$. Ainsi le nombre de voitures louées dépassera 400 à partir du mois d'août 2020.

2) Les limites

8 On conjecture que la limite de la suite (v_n) est 5.

	A	B
1	n	v_n
2	0	4
3	1	4,5
4	2	4,8
5	3	4,9
6	4	4,94117647
7	5	4,96153846
8	6	4,97297297
9	7	4,98
10	8	4,98461538
11	9	4,98780488
12	10	4,99009901
...	...	...
99	97	4,99989373
100	98	4,99989589
101	99	4,99989798
102	100	4,99990001

14 a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 13n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 13n - 6 + \sqrt{n} = +\infty$ (limite d'une somme).

b) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = 2n - 30\sqrt{n} + 4 = n \left(2 - \frac{30}{\sqrt{n}} + \frac{4}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{30}{\sqrt{n}} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{30}{\sqrt{n}} + \frac{4}{n} = 2 \text{ (limite d'une somme).}$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(2 - \frac{30}{\sqrt{n}} + \frac{4}{n} \right) = +\infty$$

(limite d'un produit)

c) Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{n \times 100}{n \left(2 + \frac{3}{n} \right)} = \frac{100}{2 + \frac{3}{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{3}{n} = 2 \text{ (limite d'une somme)}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{100}{2} = 50 \text{ (limite d'un quotient).}$$

15 a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + 1 = +\infty$ (limite d'une somme) et
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 - 20n = -\infty$ (limite d'une somme).

On ne peut pas conclure pour la limite de la suite (u_n) , on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$11n^2 - 3n + 1 = n^2 \left(11 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 11 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = 11.$$

Donc (limite d'un produit), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 11n^2 - 3n + 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(11 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty.$$

$$\text{Mais } \lim_{n \rightarrow +\infty} 13n + 10 = +\infty.$$

On ne peut pas conclure pour la limite de la suite (v_n) , on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$n^3 - n^2 - 20n + 1 = n^3 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{20}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{20}{n^2} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} - \frac{20}{n^2} + \frac{1}{n^3} = 1.$$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{20}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = +\infty$$

(limite d'un produit)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{11n^2 - 3n + 1}{13n + 10} = \frac{n^2 \left(11 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(13 + \frac{10}{n} \right)} = \frac{n \left(11 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{13 + \frac{10}{n}}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 11 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = 11.$$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(11 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty \text{ (limite d'un produit).}$$

$$\text{En outre, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 13 + \frac{10}{n} = 13 \text{ (limite d'une somme).}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ (limite d'un quotient).}$$

33 Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{2n - 3}{n + 1} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{1,3^{n+1}}.$$

On conjecture graphiquement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ et
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

34 a) Tableau de valeurs

n	8	98	998	9 998	$10^9 - 2$
u_n	0,9	0,99	0,999	0,9 999	$1 - 10^{-9}$

b) On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

53 a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + n^2 = +\infty$ (limite d'une somme).

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n\sqrt{n} = -\infty$ (limite d'un produit).

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - \frac{1}{n} = +\infty$ (limite d'une somme).

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 3 = +\infty$
 (limite d'une somme).

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 3} = 0 \text{ (limite d'un quotient).}$$

54 a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4\sqrt{n} = -\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8,2 - 4\sqrt{n} = -\infty$ (limite d'une somme).

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 = 1$ (limite d'une somme).

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8 - n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 + 1 = +\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (8 - n)(2n^2 + 1) = -\infty$

(limite d'un produit).

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 - \frac{1}{n} = 5$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \sqrt{n} = -\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{1}{n}\right)(2 - \sqrt{n}) = -\infty$

(limite d'un produit).

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$

(limites de sommes).

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 + n}{2 - \frac{1}{n}} = +\infty$ (limite d'un quotient).

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + 3 \frac{n}{n} = +\infty$ (limite d'une somme).

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{40}{2n + 3} = 0$ (limite d'un quotient).

58 Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$-n^2 + 4n + 2 = n^2 \left(-1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} \right).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} = -1$ (limite d'une somme).

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(-1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = -\infty$

(limite d'un produit).

59 Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{1} = 1$

(limite d'un quotient).

60 Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{40n + 1}{n^2 + 2} = \frac{n \left(40 + \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)} = \frac{40 + \frac{1}{n}}{n \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 40 + \frac{1}{n} = 40.$$

Puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{n^2} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$,

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.