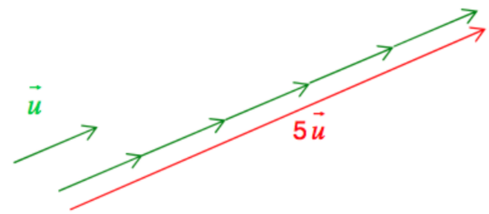
Colinéarité de vecteurs

I Produit d'un vecteur par un nombre réel

Exemple 1
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan.
S l'on pose $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}$ alors on peut le noter $\overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{u}$

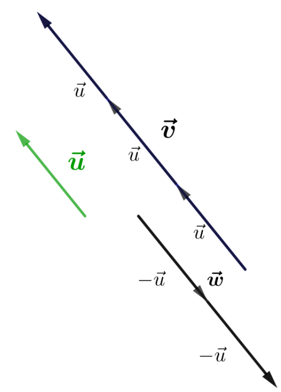


Remarque
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $5\overrightarrow{u}$ ont la même direction et le même sens.
La norme (longueur) de $5\overrightarrow{u}$ est égale à 5 fois la norme de $\overrightarrow{u}$

Propriété 1
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul du plan, et k un réel non nul.
Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est :

1. de même direction que $\overrightarrow{u}$
2. de même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$
3. de norme égale à k fois la norme de $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$ et $-k$ fois la norme de $\overrightarrow{u}$ si $k < 0$

Exemple 2
Soient 3 vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ tels que :
$\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u}$
Pour $\overrightarrow{v}$:
Direction : les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
Sens : $k =$ ..... donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
Longueur : $k =$ ..... donc la longueur du $\overrightarrow{v}$ est
Pour $\overrightarrow{w}$:
Direction : les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$
Sens : $k =$ ..... donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$
Longueur : $k =$ ..... donc la longueur du $\overrightarrow{w}$ est



Propriété 2
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, et k un réel :

1. si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors les coordonnées de $k\overrightarrow{u}$ sont : $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$
2. $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$

Exemple 3
1. Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \ldots \times \ldots \\ \ldots \times \ldots \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$
2. Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} \ldots \times \ldots \\ \ldots \times \ldots \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$

II Colinéarité de 2 vecteurs

a) Définition

Définition 1
*Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si ils ont **la même direction**, c'est à dire qu'il existe un réel k tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}}$*

Remarque
On convient que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan

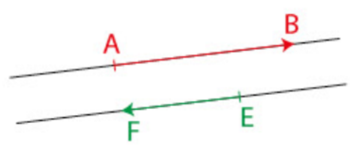
Exemple 4
En reprenant l'exemple 2 : Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont donc colinéaires.

Propriété 3
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **colinéaires si et seulement si** $\boldsymbol{xy' - x'y = 0}$
On appelle le nombre $\boldsymbol{xy' - x'y}$ **le déterminant de** $\boldsymbol{\overrightarrow{u}}$ **et** $\boldsymbol{\overrightarrow{v}}$

b) Applications : Parallélisme et alignement

Propriété 4
Soient A, B, C et D 4 points du plan.

1. Les droites (AB) et (EF) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires



2. Les points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Exercice 1
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé, et 5 points $A(-7; 5)$, $B(-1; 0)$, $C(1; -1)$, $D(1; 1)$ et $E(7; -4)$ du plan.

1. Les droites (AB) et (CD) sont elles parallèles?
2. Les droites (BC) et (AD) sont elles parallèles?
3. Les points B, C et E sont ils alignés?