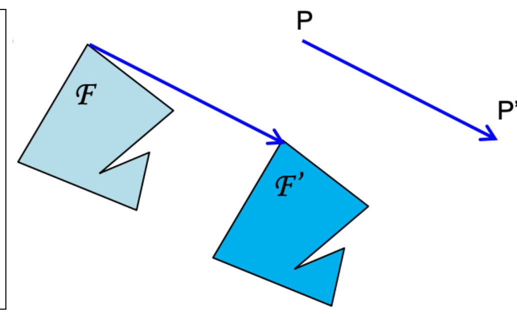
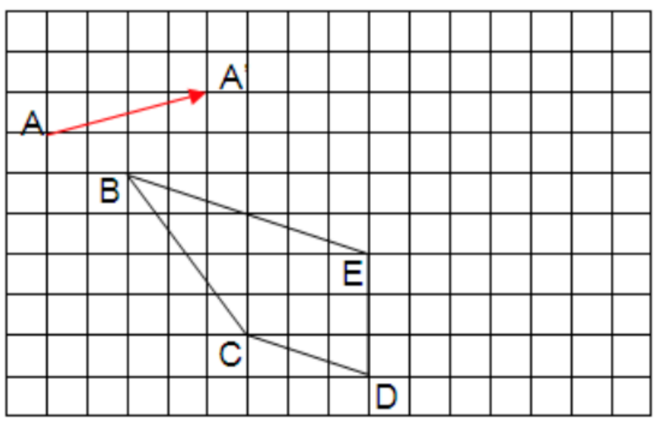
Vecteurs

I Rappel : Translation

Définition 1
Soit P et P' deux points du plan.
On appelle translation qui envoie P sur P' la transformation dont l'image F' d'une figure F est obtenue en faisant glisser la figure F :
- Selon la direction de la droite (PP')
- Dans le sens de P vers P'
- D'une longueur égale à PP'

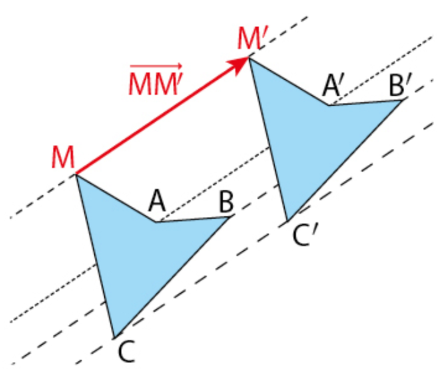


Exemple 1
Soit ***t*** la translation qui tranforme A en A'.
Construire l'image B'C'D'E' du trapèze BCDE, par la translation ***t***



II Notion de vecteur

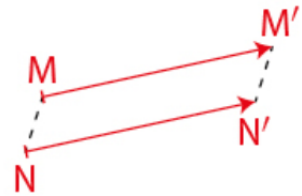
Définition 2
M et M' sont deux points distincts du plan.
La translation qui transforme M en M' est appelée translation de **vecteur** $\overrightarrow{MM'}$
Un vecteur $\overrightarrow{MM'}$ *est caractérisé par :*
- ***Une direction*** *: celle de la droite (MM')*
- ***Un sens*** *: de A vers A'*
- ***Une longueur*** *(appelée aussi* ***norme****) : la longueur MM'*



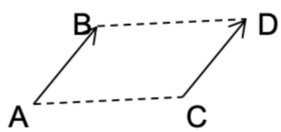
On note $\vec{u}$ ce vecteur et on écrit $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.
On dit que $\overrightarrow{MM'}$ est un **représentant** du vecteur $\vec{u}$
$\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont également des représentants du vecteur $\vec{u}$

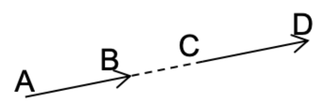
III Egalité de vecteurs

Définition 3
- Lorsque la translation qui transforme M en M' transforme également N en N', on dit que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux.
- Deux vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux si ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.
On note $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$

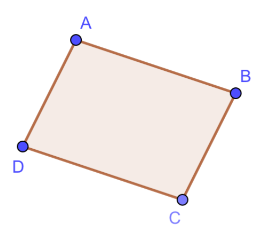


Propriété 1
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **si et seulement si** le quadrilatère AB**DC** est un parallélogramme (éventuellement aplati).

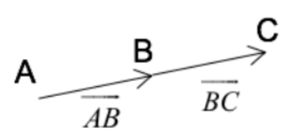




Exemple 2
A partir du parallélogramme ABCD, construire les points E,F,G et H tels que : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$



Propriété 2
B est le milieu du segment[AC] si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$



IV Vecteur nul, vecteurs opposés

1) Vecteur nul

Définition 4
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul si les points A et B sont confondus.

On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

Remarque
Pour tout point M, on a : $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$

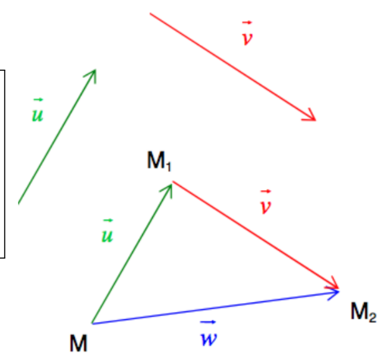
2) Vecteurs opposés

Définition 5
Deux vecteurs sont opposés lorsqu'ils ont la même direction, la même longueur, et le sens contraire.

Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{M'M}$ sont opposés. On note $\overrightarrow{M'M} = -\overrightarrow{MM'}$

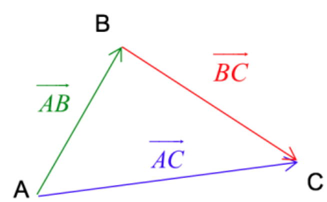
V Somme et différence de vecteurs

1) Somme de deux vecteurs

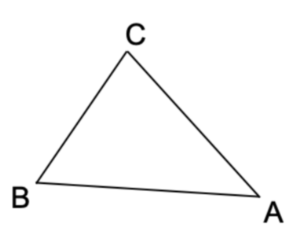


Définition 6
La somme de 2 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur associé à la translation qui résulte de l'enchainement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et de vecteur $\overrightarrow{v}$. On note ce vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

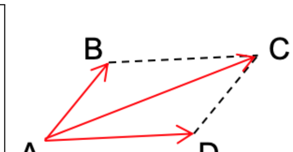
Propriété 3
Relation de Chasles
Pour tout points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Exemple 3
Soit un triangle ABC, construire le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

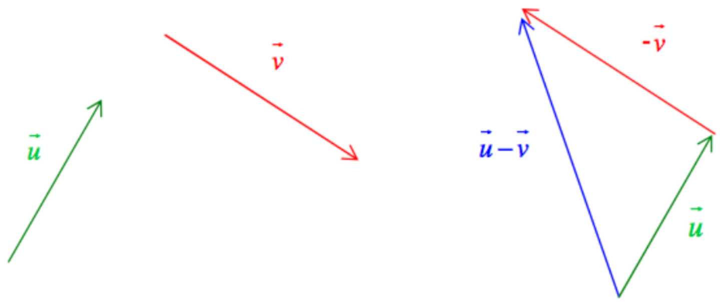


Propriété 4
Règle du parallélogramme
Soient A,B et C trois points.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.



2) Différence de deux vecteurs

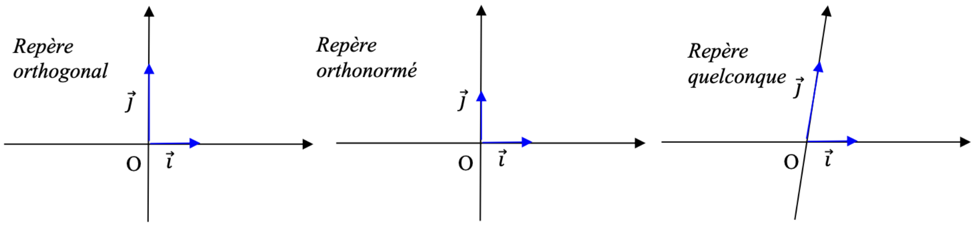
Définition 7
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques.
On appelle différence du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u}$ - $\vec{v}$ tel que : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \overrightarrow{-v}$



VI Repère du plan

Trois points distincts O, I et J du plan forment un repère que l'on peut noter (O, I, J)
L'origine du repère O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).
En notant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ alors ce repère se note aussi $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Définition 8
1. *Un repère est dit orthogonal si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.*
2. *Un repère est dit orthonormé si il est orthogonal et si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1.*



VII Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 5
Soient A et B deux points de coordonnées $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées : $M(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2})$

Exemple 4
1. Soient 2 points $A(3; 5)$ et $B(7; -1)$. Calculer les coordonnées de M milieu de [AB]

2. Soient 2 points $C(2;-4)$ et $D(-5;4)$. Calculer les coordonnées de U symétrique de C par rapport à D.

VIII Distance dans un repère orthonormé

Propriété 6
Soient A et B deux points de coordonnées $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
Alors $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

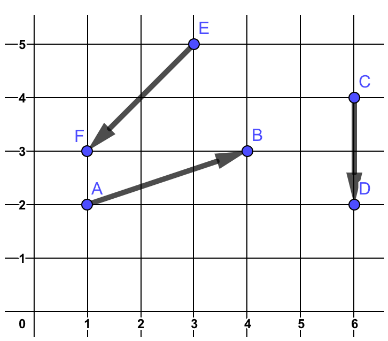
Exemple 5
Soient $A(3;2)$ et $B(2;-2)$. Calculer la longueur AB.

IX Coordonnées d'un vecteur

Définition 9
Soit M un point quelconque d'un repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ et un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OM}$
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées du point M.
On note $\overrightarrow{u}(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Propriété 7
Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points dans un repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$
Alors $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

Exemple 6
.



Propriété 8
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et un réel k, alors

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$
2. Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
3. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Exemple 7
Soient 6 points $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées des vecteurs : $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$, et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$

Exercice 1
Dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, soient les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.