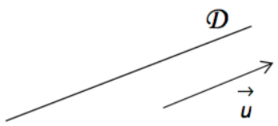
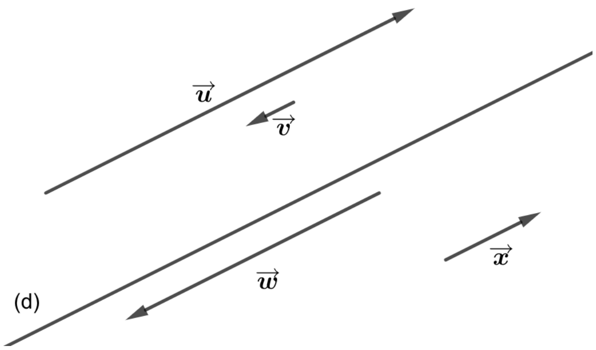
Equation de droites

I Vecteur directeur d'une droite

Définition 1
Soit (d) une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de (d) tout vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ qui possède la même direction que la droite (d)

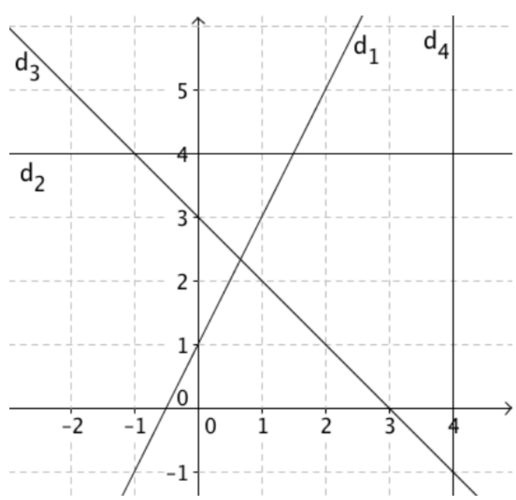


Remarque
Une même droite possède donc une infinité de vecteurs directeurs.



Ici, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{x}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (d)

Exemple 1
Déterminer, pour chacun des droites suivantes, un vecteur directeur.



II Equation cartésienne d'une droite

Définition 2
Une équation cartésienne d'une droite (d) est une équation de la forme $ax + by + c = 0$
avec a et b non tous nuls.

Propriété 1
Un vecteur directeur de d est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Exemple 2
Soit une droite $(d1)$ dont une équation cartésienne est $3x-2y+8=0$, donner un vecteur directeur de cette droite

Exemple 3
Soit $(d2)$ une droite passant par $A(3;4)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

Donner une équation cartésienne de $(d2)$

III Equation réduite d'une droite

1) Passer de l'équation cartésienne à l'équation réduite

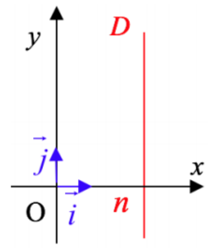
Propriété 2
1. **Si $b\neq 0$**, l'équation cartésienne $ax+by+c=0$ de la droite (d) peut être ramenée à une équation réduite $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ (*en isolant le by et en divisant tout par b pour isoler le y*)
   On note $m=-\frac{a}{b}$ et $p=-\frac{c}{b}$.
   m est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite (d) et
   p est appelé **l'ordonnée à l'origine** de la droite (d)
2. **si $b=0$**, l'équation cartésienne $ax+by+c=0$ de la droite (d) peut être ramenée à une équation réduite $y=-\frac{c}{a}$. Dans ce cas, (d) est parallèle à l'axe des ordonnées.

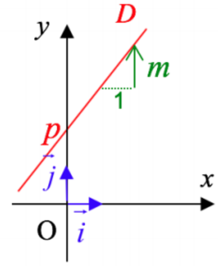
Exemple 4
Soient $(d1)$, $(d2)$ et $(d3)$ 3 droites d'équations cartésienne :
$(d1): 4x+y-6=0$ $(d2): 2x-4y+7=0$ et $(d3): 3x+8=0$
Pour chacune d'entre elle, donner son équation réduite.

Propriété 3
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit D une droite du plan.

1. **Si D est parallèle à l'axe des ordonnées** alors l'équation réduite de D est de la forme
$x = n$ avec n un nombre réel

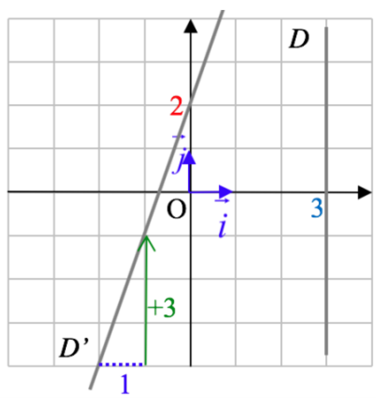
2. **Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées** alors l'équation réduite de D est de la forme
$y = mx + p$ avec m et p deux nombres réels.



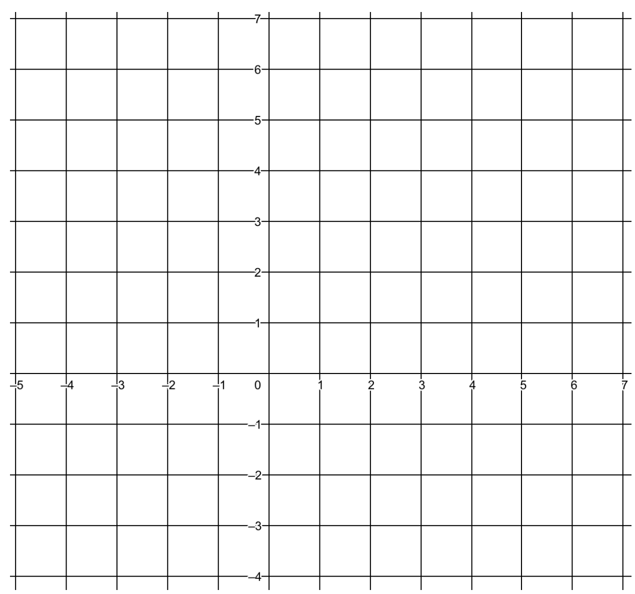


Exemple 5
Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d'équations :
a) $y = -2x + 3$. b) $y = 5$. c) $4x + 2y - 1 = 0$

Exemple 6
La droite D a pour équation $x = 3$
La droite D' a pour équation $y = 3x + 2$. Son ordonnée à l'origine est 2 et son coefficient directeur est 3.



Exercice 1
Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ suivant, tracer les droites $(d1)$, $(d2)$ et $(d3)$ d'équations respectives :
$y = 2x + 3$, $y = 4$ et $x = 3$



Exemple 7
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Les points $A(6,4;42)$ et $B(346;2419)$ appartiennent t-ils à la droite $(d1)$ d'équation $y = 7x - 3$?

Remarque
Pour démontrer que 3 points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer par exemple quel le point A appartient à la droite (BC).

2) Pente d'une droite

Propriété 4
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts et tels que $x_A \neq x_B$, alors la droite (AB) a pour pente $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exercice 2
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Soient $A(4;-1)$ et $B(3;5)$ deux points du plan.
Déterminer une équation de la droite (AB)

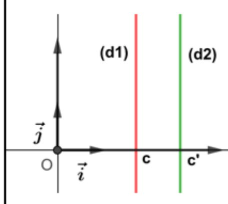
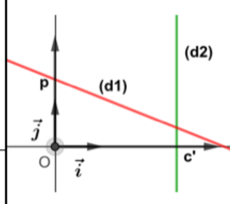
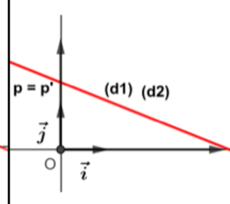
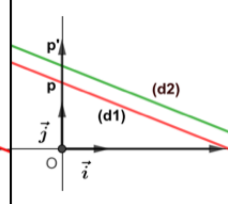
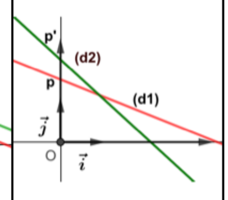
IV Position relative de 2 droites

Dans le plan, deux droites peuvent être :
* Parallèles
* Confondues (un cas particulier dans les droites parallèles)
* Sécantes

1) A l'aide de l'équation réduite

Propriété 5
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Soient $(d1)$ et $(d2)$ deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
$(d1)$ et $(d2)$ sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur
$(d1) : y = mx + p$ et $(d2) : y = m'x + p'$ sont parallèles $\iff m = m'$

Tableau récapitulatif

Equation de (d1)	x = c	y = mx + p	y = mx + p		
Equation de (d2)	x = c’	x = c’	y = m’x + p’		
			Si m = m’		Si m ≠ m’
Position de (d1) et (d2)	**PARALLELES**	**SECANTES**	**Si p = p’ CONFONDUES**	**Si p ≠ p’ PARALLELES**	**SECANTES**
Représentation graphique					

Exemple 8
Soient 6 droites $(d1)$, $(d2)$, $(d3)$, $(d4)$, $(d5)$ et $(d6)$ telles que :
$(d1) : y = 2x + 7$ $(d2) : x = 6$ $(d3) : y = 2x + 7$ $(d4) : y = 3x - 3$ $(d5) : x = 15$ $(d6) : y = 2x - 1$

1. $(d1)$ et $(d2)$
2. $(d1)$ et $(d3)$
3. $(d1)$ et $(d4)$
4. $(d1)$ et $(d5)$
5. $(d1)$ et $(d6)$
6. $(d2)$ et $(d5)$

2) A l’aide de l’équation cartésienne

Propriété 6
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan.
$(d1)$ et $(d2)$ sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires
Soient $(d1) : y = ax + by + c = 0$ et $(d2) : y = a'x + b' + c' = 0$ deux droites avec $\vec{u}$ un vecteur directeur de $(d1)$ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de $(d2)$.
$(d1)$ et $(d2)$ sont parallèles $\iff det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$

Remarque

1. Si le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul, les droites peuvent êtres parallèles ou confondues.
   En prenant n’importe quel point de $(d1)$, si il appartient aussi à (d2) alors les droites sont confondues. Sinon elles sont parallèles.
2. On parle plus précisément de droites strictement parallèles (parallèles et non confondues) ou de droites parallèles en général (ou le cas ”confondues” est inclus)

Exemple 9
Soient 4 droites $(d1)$, $(d2)$, $(d3)$ et $(d4)$ telles que :
$(d1) : 12x - 20y - 10 = 0$ $(d2) : -9x + 15y = 0$ $(d3) : 6x - 10y - 5 = 0$ $(d4) : 3x + 4y - 3 = 0$

1. $(d1)$ et $(d2)$
2. $(d1)$ et $(d3)$
3. $(d1)$ et $(d4)$

Exercice 3
En reprenant l'exemple précédent, donner le point d'intersection de $(d1)$ *et* $(d4)$