Arithmétique

I Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1) Multiple et diviseur

Définition 1
Soient a et b deux entiers. On dit que ***a* est un multiple de *b*** *(ou encore* ***a* est divisible par *b****) si il existe en entier k tel que* $\boldsymbol{a = kb}$*.*
On dit alors que ***b* est un diviseur de *a***

Exemple 1
1. 20 est un multiple de 4 car $20 = k \times 4$ avec $k = 5$. On peut aussi dire que 20 est divisible par 4 ou que 4 est un diviseur de 20
2. -12 est un multiple de 3 car ....avec $k =$ ....
   On peut dire aussi que .... ou que ....
3. 13 n'est pas un multiple de 2 car $13 = 6,5 \times 2$ et $6,5 \notin \mathbb{Z}$ (6,5 n'est pas un entier)

Propriété 1
La somme de 2 multiples de a est un multiple de a

Démonstration
On note b et c deux multiples de a.
b est un multiple de a donc il existe un k_1 entier tel que $b = k_1 \times a$
c est un multiple de a donc il existe un k_2 entier tel que $c = k_2 \times a$
Donc $b + c = k_1 \times a + k_2 \times a = (k_1 + k_2) \times a$
Soit $k = k_1 + k_2$. k est un entier car c'est la somme de 2 entiers. Donc $b + c = k \times a$
Donc $b + c$ est un multiple de a

a) Nombres pairs, nombres impairs

Définition 2
1. *Un nombre pair est un multiple de 2*
2. *Un nombre impair est un nombre qui n'est pas pair*

Propriété 2
1. Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$ avec k entier
2. Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k + 1$ avec k entier

Exemple 2
1. 36 est un nombre pair, il peut s'écrire : $36 = 2 \times 18$
2. 41 est un nombre impair, il peut s'écrire $41 = 2 \times 20 + 1$

Propriété 3

1. Le carré d'un nombre pair est pair
2. Le carré d'un nombre impair est impair

Démonstration

2) Critères de divisibilité

Propriété 4
RAPPEL
Un nombre entier relatif est divisible :

1. Par 2 si son chiffre des unités est 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8
2. Par 3 si la somme de tous ses chiffres est dans la table de 3
3. Par 4 si le nombre formé par son chiffre des dizaines et celui des unités est dans la table de 4
4. Par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5
5. Par 9 si la somme de tous ses chiffres est dans la table de 9
6. Par 10 si son chiffre des unités est 0

II Fractions irréductibles

1) Nombres premiers

Définition 3
Un nombre est premier si il possède exactement 2 diviseurs : 1 et lui même

Exemple 3
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 et 19 sont des nombres premiers

Remarque

1. 1 n'est pas un nombre premier car il ne possède qu'un seul diviseur (lui même)
2. 0 n'est pas un nombre premier car il est divisible par n'importe quel nombre entier non nul
3. 6 n'est pas un nombre premier car il possède 4 diviseurs : 1 ; 2 ; 3 et 6

2) Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété 5
Tout nombre non premier peut se décomposer de façon unique en **produit de facteurs premiers** (à l'ordre des facteurs près)

Exemple 4
$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$ avec 2, 3 et 5 qui sont des nombres premiers.
On peut aussi le noter : $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

METHODE POUR DECOMPOSER UN NOMBRE EN PRODUIT DE FACTEURS PREMIERS

`https://www.youtube.com/watch?v=jE9a3uvVyFM`

Exemple 5
Décomposer 60 et 126 en produit de facteurs premiers

3) Fraction irréductible

Définition 4
Une fraction est dite ***irréductible*** *lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1 (on dit alors qu'ils sont* ***premiers entre eux****)*

Exemple 6
Rendre irréductible la fraction $\frac{84}{30}$ à l'aide des décompositions en produit de facteurs premiers.
$84 =$
$30 =$
Donc $\frac{84}{30} =$