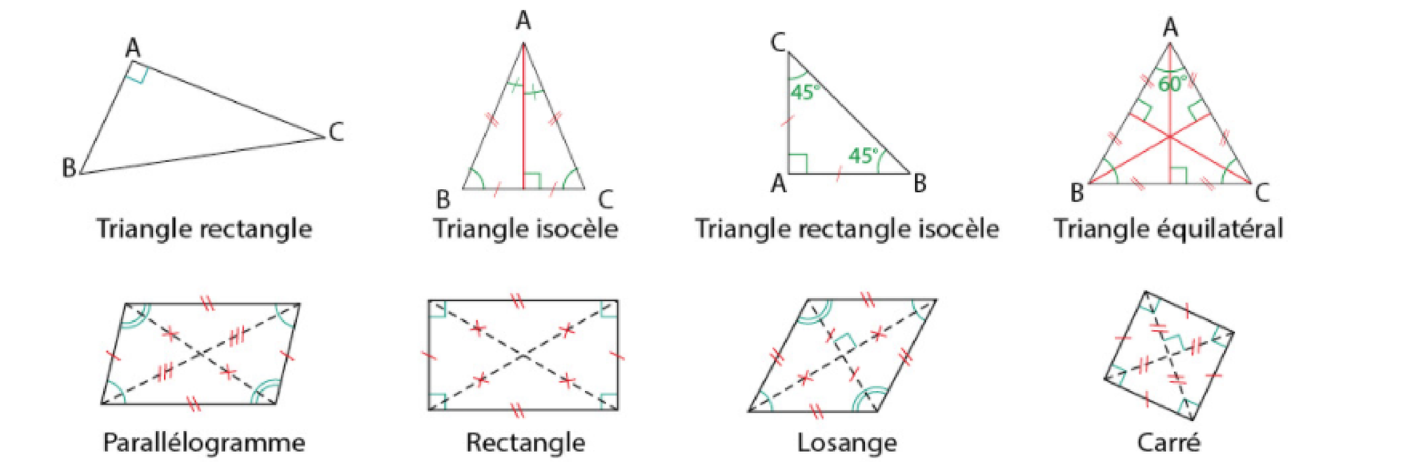
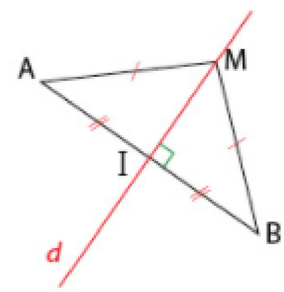
Problèmes de Géométrie

I Rappels : Configurations du plan

1) Configurations usuelles



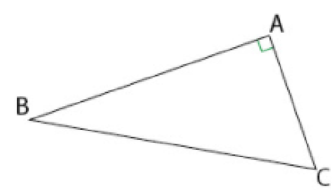
Définition 1
La ***médiatrice*** *d'un segment $[AB]$ est la droite (d)* ***perpendiculaire*** *au segment $[AB]$ en son milieu.*



Propriété 1
Un point M appartient à la (d) si et seulement si $\boldsymbol{MA = MB}$

2) Egalité de Pythagore et de Thalès

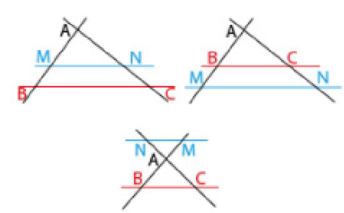
Théorème 1
Un triangle ABC est rectangle en $A \iff \boldsymbol{BC^2 = AB^2 + AC^2}$



Théorème 2
(BM) et (CN) sont deux droites sécantes en un point A.

- Si $(MN)//(BC)$ alors $\boldsymbol{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}}$

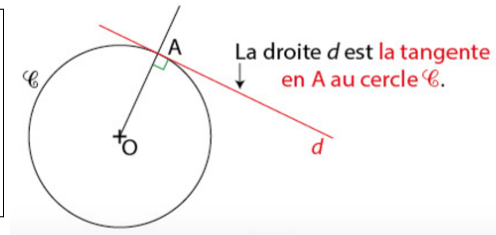
- Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A,M,B d'une part, et A,N,C d'autre part sont **alignés dans cet ordre**, alors $\boldsymbol{(MN)//(BC)}$



3) Tangente à un cercle

Définition 2
$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et A un point de ce cercle.

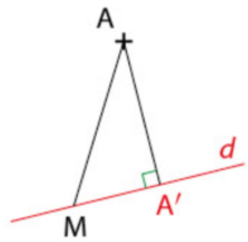
*La **tangente** au cercle $\mathcal{C}$ en A est la **droite perpendiculaire** en A à la droite (OA)*



Remarque
La tangente en A au cercle $\mathcal{C}$ coupe ce cercle au seul point A

II Projeté orthogonal

Définition 3
*Le **projeté orthogonal** d'un point A sur une droite d est le point A' de d tel que les droites d et (AA') sont perpendiculaires*



Propriété 2
Le projeté orthogonal A' du point A sur une droite (d) est le point de la droite (d) **le plus proche** du point A

Démonstration
Si A' est le point de la droite (d) le plus proche du point A, cela signifie que que pour tout point M de (d) :
$AM >$ . . . .

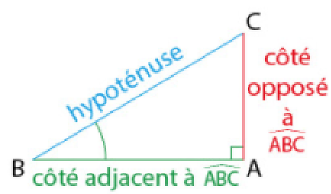
Dans le triangle AMA' rectangle en A', d'après l'égalité de pythagore :
. . . .
Or $A'M^2$ . . . . donc $AM^2 >$ . . . .
Donc AM . . . . (car les longuers AM et AA' sont . . . .)

Remarque
- On dit que AA' est **la distance** du point A à la droite (d)
- Lorsque le point A appartient à une droite (d), son projeté orthogonal sur (d) est lui-même.

III Trigonométrie dans un triangle rectangle

1) Rappels : Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Définition 4
Dans un triangle ABC rectangle en A,
$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$ $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}$ $\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB}$



2) Premières propriétés

Propriété 3
ABC est un triangle rectangle en A et on note α la mesure en degré, d'un angle aigu de ce triangle.

$$\boldsymbol{0 < cos(\alpha) < 1} \qquad \boldsymbol{0 < sin(\alpha) < 1} \qquad \boldsymbol{cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1}$$

Démonstration
D'après le théorème de pythahore : ....

Or $AB =$ .... et $AC =$ ....

d'où ....

C'est à dire ....

En factorisant : ....
Ainsi : ....