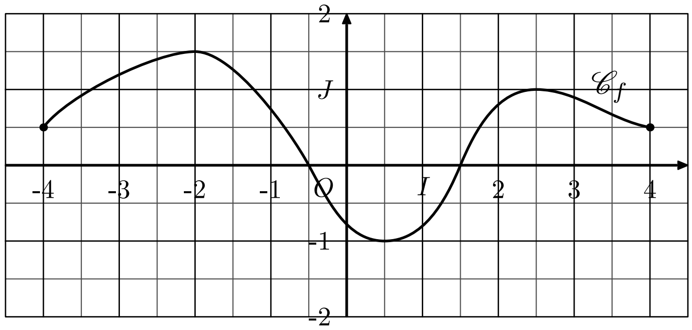
Exercices : Dérivation et variations

Exercice 1

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère $(O;I;J)$ orthonormé ci-dessous :



On répondra à l'ensemble des questions de cet exercice en se référant au graphique ci-dessus.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-4;4]$.

2. a. On considère la tangente (T_1) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3. Donner le signe du coefficient directeur de la tangente (T_1).
   b. On considère la tangente (T_2) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Donner le signe du coefficient directeur de la tangente (T_2).
   c. On considère la tangente (T_3) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2. Donner le signe du coefficient directeur de la tangente (T_3).

3. a. Quel est le signe du nombre dérivée de la fonction f en $x=-1$?
   b. Quel est le signe du nombre dérivée de la fonction f en $x=2$?
   c. Quel est le signe du nombre dérivée de la fonction f en $x=2{,}5$?

4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.

Exercice 2

On considère une fonction f définie sur $[-3;5]$ dont la dérivée admet le tableau de signes suivant :

x	-3		-1		2		5
Signe de f'		$+$	0	-	0	$+$	
Variation de f							

On a les valeurs et relations suivantes :

- $f(-1)=3$
- $f(5)=-2\cdot f(-1)$
- $f(-3)=f(5)+5$
- $f(2)=f(-1)\cdot f(5)$

Dans le tableau précédent, compléter la ligne des variations de la fonction f.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[-4;5]$ par la relation :
$f(x)=-2\cdot x^3+3\cdot x^2+12\cdot x-2$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Etablir le signe de la fonction f' sur $[-4;5]$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 4

Chacune des fonctions ci-dessous est définie sur $\mathbb{R}$. Etudier les variations de chacune de ces fonctions :

1. $f(x)=x^3-9\cdot x^2+15\cdot x-7$
2. $g(x)=-x^3-3\cdot x^2-3\cdot x+3$
3. $h(x)=-\dfrac{1}{3}\cdot x^3+\dfrac{1}{2}\cdot x^2-\dfrac{1}{2}\cdot x-1$

(on indiquera dans le tableau de variations les valeurs des extrémums locaux)

Exercice 5

On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x)=x^3+3\cdot x^2-2$

1. a. Etablir l'égalité : $f(x)=(x+1)(x^2+2\cdot x-2)$
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f *(on indiquera les valeurs exactes des extrémums locaux).*

Exercice 6

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0;25]$ par :
$C(x)=x^3-30\cdot x^2+400\cdot x+100$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en euros. Justifier que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0;25]$ est :
$B(x)=-x^3+30\cdot x^2-153\cdot x-100$

2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Calculer $B'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;25]$.

3. Justifier le tableau suivant :

x	0		3		17		$+\infty$
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variations complet de la fonc-

tion B sur l'intervalle $[0\,;25]$.

5. Déterminer le nombre de pièce que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal?

Exercice 7

Une entreprise produit et vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large ; on note x sa longueur exprimée en kilomètre, x étant un nombre compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euro de ce tissu est donné, en fonction de x, par :
$C(x) = 15{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 + 350{\cdot}x + 1\,000$

Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise.
Pour tout $x \in [0\,;10]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

2. Montrer que pour tout $x \in [0\,;10]$:
$B(x) = -15{\cdot}x^3 + 120{\cdot}x^2 + 180{\cdot}x - 1\,000$

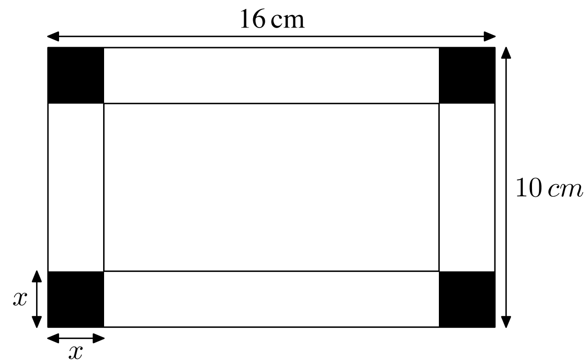
3. Déterminer $B'(x)$ pour $x \in [0\,;10]$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

4. Etudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de la fonction B sur $[0\,;10]$.

5. a. Pour quelle longueur de tissu produit et vendu l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal?
   b. Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal?

Exercice 8

On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en cm.



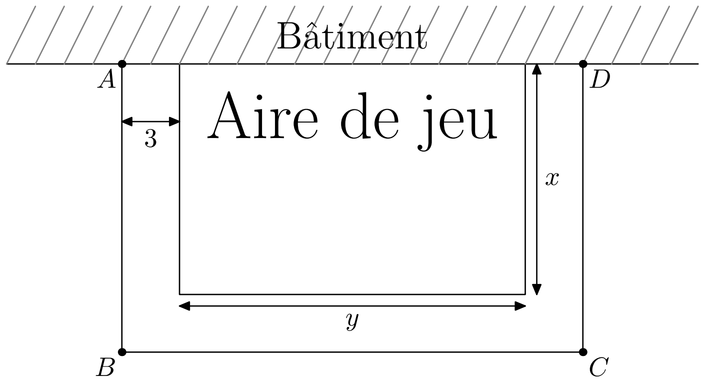
1. Quelles sont les valeurs possibles de x?

2. Vérifier que le volume V de cette boîte s'exprime, en fonction de x, par :
$\mathcal{V}(x) = 4{\cdot}x^3 - 52{\cdot}x^2 + 160{\cdot}x$.

3. a. Vérifier que : $V'(x) = 12{\cdot}x^2 - 104{\cdot}x + 160$
   Etudier son signe sur l'intervalle $[0\,;5]$.
   b. Construire le tableau de variations de la fonction V sur l'intervalle $[0\,;5]$.
   c. En déduire les dimensions de la boite finale afin que le volume maximal.

Exercice 9

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire de $450\,m^2$. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à $10\,m$. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allé de $3\,m$ de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
On s'intéresse à la longueur L de la clôture :
$L = AB + BC + CD$.
On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu.

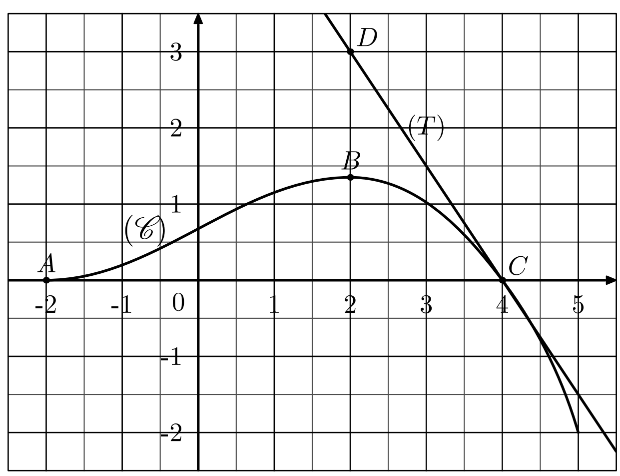
1. a. Démontrer que $y = \dfrac{450}{x}$, puis justifier que x appartient à l'intervalle $[10\,;45]$.
   b. Exprimer la longueur L en fonction de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[10\,;45]$ par :
$f(x) = 2{\cdot}x + 12 + \dfrac{450}{x}$
   a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. Démontrer que, pour tout x appartenant à $[10\,;45]$, $f'(x)$ a le même signe que $(x^2 - 225)$. En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   c. Dresser le tableau de variations de f.

3. Déduire de l'étude précédente les dimensions à donner à l'aire de jeu pour que la longueur de la clôture soit la plus petite possible. Quelle est alors cette longueur?

Exercice 10

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;5]$, croissante sur $[-2\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;5]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La courbe $(\mathscr{C})$ tracée ci-dessous représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé ; elle passe par les points $A(-2\,;0)$, $B\left(2\,;\dfrac{4}{3}\right)$ et $C(4\,;0)$.
Elle admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses et sa tangente (T) au point C passe par le point $D(2\,;3)$.



Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. La justication peut reposer sur le graphique ou sur un calcul.

- **Proposition 1 :** $f'(4) = -\dfrac{2}{3}$
- **Proposition 2 :** $f(2) = 0$

Exercice 11

Une entreprise fabrique des croquettes pour chiens. Chaque jour, elle en fabrique entre 0 et 80 tonnes. Le coût de fabrication, en euros, de x tonnes est modélisé par la fonction C définie par :

$$C(x) = x^3 - 105{\cdot}x^2 + 3700{\cdot}x + 4000$$

Une tonne de croquettes est vendue 1 900 €. La recette, pour x tonnes vendues, est donc donnée par une fonction R définie sur l'intervalle $\big[0\,;80\big]$.

1. a. Pour x appartenant à l'intervalle $\big[0\,;80\big]$, donner l'expression de $R(x)$.

   b. En déduire que le bénéfice réalisé par la vente de x tonnes de croquettes est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $\big[0\,;80\big]$ par :
   $$B(x) = -x^3 + 105{\cdot}x^2 - 1800{\cdot}x - 4000$$

2. Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.

3. Justifier que le signe de $B'(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	0		10		60		80
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $\big[0\,;80\big]$.

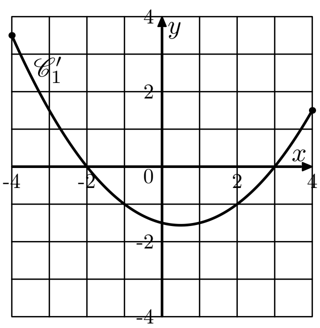
5. Quelle doit être la quantité de croquettes que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal?
   Que vaut ce bénéfice?

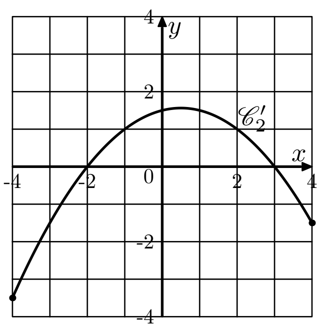
Exercice 12

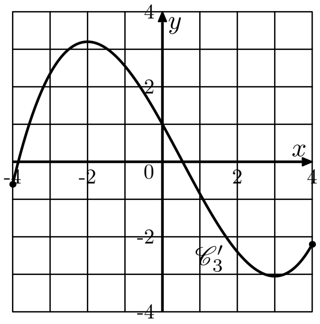
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\big[-4\,;4\big]$ et dont on connait les propriétés suivantes :

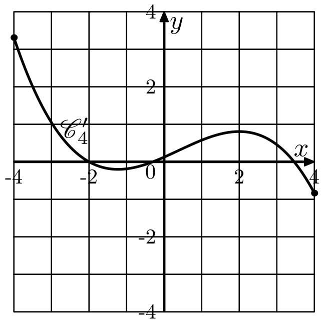
- la fonction f admet un maximum en -2 sur l'intervalle $\big[-3\,;0\big]$.
- la fonction f admet un minimum en 3 sur l'intervalle $\big[1\,;4\big]$.

Parmi les quatre courbes représentatives ci-dessous, une seule est la courbe représentative de la fonction f' dérivée de la fonction f.









Exercice 13

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 - 2x + 3}$$

1. Montrer que le dénominateur ne s'annule jamais.

Ainsi, la fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

2. Etablir que la fonction dérivée f' de la fonction f admet pour expression :
   $$f'(x) = \frac{-6x + 3}{\big(2x^2 - 2x + 3\big)^2}$$

3. a. Dresser le tableau de signes de f' sur $\mathbb{R}$..

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   On admettra les deux limites suivantes :
   $$\lim_{h \mapsto -\infty} f(x) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{h \mapsto +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

4. En déduire les extrémums de la fonction f.

Exercice 14

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 2}{2x^2 + x + 1}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Etablir que la fonction dérivée f' admet l'expression suivante :
   $$f'(x) = \frac{7x^2 + 14x}{\big(2x^2 + x + 1\big)^2}$$

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   On admet les deux limites suivantes :
   $$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \frac{3}{2} \quad ; \quad \lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$$

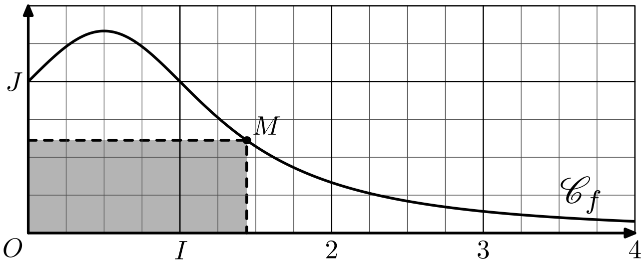
3. En déduire que la fonction f admet pour minorant le nombre -2 et pour majorant le nombre 2.

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et le rectangle représenté ci-dessus où :

- les points O et M en sont deux sommets opposés.
- ses côtés sont parallèles aux axes du repère.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de la valeur de x.

1. Donner l'expression de la fonction $\mathcal{A}$.

2. a. Montrer que la fonction $\mathcal{A}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{A}$ admet pour expression :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2-x+1)^2}$$

   b. Dresser le tableau de signes de la fonction $\mathcal{A}'$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.

3. Justifier que l'aire du rectangle est maximale lorsque le point M a pour abscisse 1.