

CORRECTIONS

Exercices : Dérivation et variations

Correction 1

1. Graphiquement, on obtient le tableau de variations ci-dessous :

x	-4	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	4
Variation de f		$\frac{3}{2}$		1	
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	

2. a. On observe que le coefficient directeur de la droite (T_1) , tangente au point d'abscisse -3 de la courbe $\mathcal{C}_f$, est positif.
- b. Le coefficient directeur de la droite (T_2) est négatif.
- c. Le coefficient directeur de la droite (T_3) est nul : la tangente au point d'abscisse -2 est horizontale.
3. a. On a $f'(-1) < 0$ car la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 est une droite décroissante.
- b. On a $f'(2) > 0$ car la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 est une droite croissante.
- c. On a $f'(2,5) = 0$ car la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2,5 est une droite constante.
4. Graphiquement et par des raisonnements similaires à la question précédente, on obtient le tableau de signes suivant :

x	-4	-2	0,5	2,5	4		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Correction 2

Les indications données dans l'énoncé permettent d'obtenir les images suivantes par la fonction f :

- $f(-1) = 3$
- $f(5) = -2 \cdot f(-1) = -2 \times 3 = -6$
- $f(-3) = f(5) + 5 = -6 + 5 = -1$
- $f(2) = f(-1) \cdot f(5) = 3 \times (-6) = -18$

Ainsi, on obtient le tableau de variations de la fonction f :

x	-3 -1 2 5				
Signe de f'	+ 0 - 0 +				
Variation de f	-1 3 3 -18 -18 -6				

Correction 3

1. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
- $$f'(x) = -2 \cdot (3x^2) + 3 \cdot (2x) + 12 = -6x^2 + 6x + 12$$
2. Le polynôme du second degré définissant la fonction f' a pour discriminant :
- $$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 6^2 - 4 \times (-6) \times (12) = 36 + 288 = 324$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{324} = 18$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\ &= \frac{-6 - 18}{2 \times (-6)} & &= \frac{-6 + 18}{2 \times (-6)} \\ &= \frac{-24}{-12} & &= \frac{12}{-12} \\ &= 2 & &= -1 \end{aligned}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, la fonction f' admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	2	5	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

3. On a les deux images suivantes par la fonction f :

- $f(-4) = -2 \times (-4)^3 + 3 \times (-4)^2 + 12 \times (-4) - 2$
 $= 128 + 48 - 48 - 2 = 126$
- $f(-1) = -2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 12 \times (-1) - 2$
 $= 2 + 3 - 12 - 2 = -9$
- $f(2) = -2 \times 2^3 + 3 \times 2^2 + 12 \times 2 - 2$
 $= -16 + 12 + 24 - 2 = 18$
- $f(5) = -2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 12 \times 5 - 5$
 $= -250 + 75 + 60 - 5 = -117$

Le signe de la dérivée f' permet de déterminer les variations de la fonction f . On obtient le tableau de variations suivant :

x	-4	-1	2	5
Variation de f	126		18	
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
		-9		-117

Correction 4

1. La fonction f admet pour fonction dérivée la fonction f' dont l'expression est :
- $$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 9 \cdot (2x) + 15 = 3x^2 - 18x + 15$$

Le polynôme du second degré définissant l'expression de la fonction f' a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-18)^2 - 4 \times 3 \times 15 = 324 - 180 = 144$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{144} = 12$

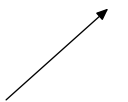
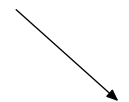
Le discriminant étant strictement positif, il admet les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\ &= \frac{-(-18) - 12}{2 \times 3} & &= \frac{-(-18) + 12}{2 \times 3} \\ &= \frac{18 - 12}{6} & &= \frac{18 + 12}{6} \\ &= \frac{6}{6} & &= \frac{30}{6} \\ &= 1 & &= 5 \end{aligned}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, ce polynôme admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Le signe de la fonction dérivée f' permet de déterminer le sens de variation de la fonction f :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
Variation de f				

2. La fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :

$$g'(x) = -3 \cdot x^2 - 3 \cdot (2x) - 3 = -3 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 3$$

Ce polynôme du second degré admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-6)^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 36 - 36 = 0$$

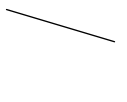
Le discriminant étant nul, ce polynôme admet pour unique racine :

$$-\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{-6}{2 \times (-3)} = -\frac{-6}{-6} = -1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on a le tableau de signes suivant de la fonction dérivée g' :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-

Le signe de la fonction dérivée permet de définir le tableau de variations de la fonction g est :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variation de g			

3. La fonction h admet pour dérivée la fonction h' dont l'expression est :

$$h'(x) = -\frac{1}{3} \cdot (3x^2) + \frac{1}{2} \cdot (2x) - \frac{1}{2} = -x^2 + x - \frac{1}{2}$$

Le polynôme du second degré définissant la fonction h' admet pour discriminant :

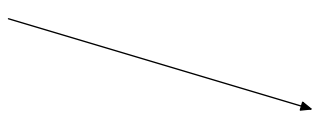
$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1^2 - 4 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 2 = -1$$

Le discriminant étant strictement négatif, la fonction h' n'admet aucune racine.

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, h' admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	-	-

Le signe de la fonction dérivée h' permet de déterminer le sens de variation de la fonction h .

x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de h		

Correction 5

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} (x+1)(x^2+2x-2) \\ = x^3 + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + x^2 + 2 \cdot x - 2 \\ = x^3 + 3 \cdot x^2 - 2 = f(x) \end{aligned}$$

- b. Etudions le signe du polynôme x^2+2x-2 . Ce polynôme a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 8 = 12$$

On a la simplification suivante :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2 \times 1} & &= \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2 \times 1} \\ &= \frac{2 \cdot (-1 - \sqrt{3})}{2} & &= \frac{2 \cdot (-1 + \sqrt{3})}{2} \\ &= -1 - \sqrt{3} & &= -1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{3}$	-1	$-1+\sqrt{3}$	$+\infty$		
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$x^2+2\cdot x-2$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

2. a. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \cdot (2x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x$$

- b. A l'aide de la factorisation suivante :

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x = x \cdot (3 \cdot x + 6)$$

Ainsi, la dérivée f' admet pour racine : -2 et 0.

Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme permet d'obtenir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- c. On a les deux images suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet f(-2) &= (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 2 = -8 + 12 - 2 = 2 \\ \bullet f(0) &= 0^3 + 3 \times 0^2 - 2 = -2 \end{aligned}$$

Le signe de la fonction dérivée f' permet de déterminer les variations de la fonction f . On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
Variation de f		2 ↗ ↘	-2	

Correction 6

1. Pour x pièce vendu, le chiffre d'affaire sera de $247 \cdot x$. Ainsi, le bénéfice réalisé en vendant x pièces sera :

$$\begin{aligned} B(x) &= 247 \cdot x - C(x) \\ &= 247 \cdot x - (x^3 - 30 \cdot x^2 + 400 \cdot x + 100) \\ &= 247 \cdot x - x^3 + 30 \cdot x^2 - 400 \cdot x - 100 \\ &= -x^3 + 30 \cdot x^2 - 153 \cdot x - 100 \end{aligned}$$

2. La fonction B' dérivée de la fonction B admet pour expression :

$$\begin{aligned} B'(x) &= 3 \times (-1) \cdot x^2 + 2 \times 30 \cdot x - 153 \\ &= -3 \cdot x^2 + 60 \cdot x - 153 \end{aligned}$$

3. L'expression de B' est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 60^2 - 4 \times (-3) \times (-153) = 3600 - 1836$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1764} = 42$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\ &= \frac{-60 - 42}{2 \times (-3)} & &= \frac{-60 + 42}{2 \times (-3)} \\ &= \frac{-102}{-6} & &= \frac{-18}{-6} \\ &= 17 & &= 3 \end{aligned}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signes de la fonction B' sur $[0; +\infty[$:

x	0	3	17	$+\infty$	
Signe de $B'(x)$	-	0	+	0	-

4. On a les images suivantes par la fonction B :

- $B(0) = -0^3 + 30 \times 0^2 - 153 \times 0 - 100$
 $= 0 + 0 - 0 - 100$
 $= -100$
- $B(3) = -3^3 + 30 \times 3^2 - 153 \times 3 - 100$
 $= -27 + 30 \times 9 - 459 - 100$
 $= -27 + 270 - 459 - 100 = -316$
- $B(17) = -17^3 + 30 \times 17^2 - 153 \times 17 - 100$
 $= -4913 + 30 \times 289 - 2601 - 100$
 $= -4913 + 8670 - 2601 - 100$
 $= 1056$
- $B(25) = -25^3 + 30 \times 25^2 - 153 \times 25 - 100$
 $= -15625 + 30 \times 625 - 3825 - 100$
 $= -15625 + 18750 - 3825 - 100$
 $= -800$

On obtient le tableau de variations ci-dessous :

x	0	3	17	$+\infty$
Variation de B	-100 ↘ ↗	-316	1056 ↘	-800

5. D'après le tableau de variations, on en déduit que le bénéfice est maximal lorsque l'entreprise vend 17 pièces alors le bénéfice est de 1056 €.

Correction 7

1. En vendant x kilomètres de tissu, la recette a pour valeur :

$$R(x) = 530 \cdot x.$$

2. Ainsi, le bénéfice a pour valeur :

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 530 \cdot x - (15 \cdot x^3 - 120 \cdot x^2 + 350 \cdot x + 1000) \\ &= 530 \cdot x - 15 \cdot x^3 + 120 \cdot x^2 - 350 \cdot x - 1000 \\ &= -15 \cdot x^3 + 120 \cdot x^2 + 180 \cdot x - 1000 \end{aligned}$$

3. L'expression de la fonction B' dérivée de la fonction B a pour expression :

$$\begin{aligned} B'(x) &= 3 \times (-15) \cdot x^2 + 2 \times 120 \cdot x + 180 \\ &= -45 \cdot x^2 + 240 \cdot x + 180 \end{aligned}$$

4. L'expression de $B'(x)$ est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 \\ &= 57600 + 32400 = 90000 \end{aligned}$$

Le discriminant étant strictement positif, la fonction B' admet les deux zéros ci-dessous :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\ &= \frac{-240 - 300}{2 \times (-45)} & &= \frac{-240 + 300}{2 \times (-45)} \\ &= \frac{-540}{-90} & &= \frac{60}{-90} \\ &= 6 & &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	6	$+\infty$	
$-45 \cdot x^2 + 240 \cdot x + 180$	-	0	+	0	-

On en déduit le tableau de signes de la fonction B' :

x	0	6	10
$B'(x)$	+	0	-

On en déduit les variations de la fonction B :

- Sur $[0; 6]$, la fonction B est croissante.
 - Sur $[6; 10]$, la fonction B est décroissante.
5. a. D'après l'étude des variations de la fonction B , on en déduit que le bénéfice est maximal lorsque l'entreprise vend 6 km de tissu.
- b. La valeur du bénéfice maximal est :

$$\begin{aligned}
 B(6) &= -15 \times 6^2 + 120 \times 6^2 + 180 \times 6 - 1000 \\
 &= -15 \times 216 + 120 \times 36 + 180 \times 6 - 1000 \\
 &= -3240 + 4320 + 1080 - 1000 = 1160
 \end{aligned}$$

Correction 8

1. x étant une mesure de longueur, elle doit être positive. De plus, la valeur de deux " x " ne peuvent dépasser la mesure de la largeur, c'est à dire que x doit être inférieure à 5.

Dans, le cas où $x=0$ où $x=5$, notre boîte n'aurait pas de profondeur.

Nous considérons x appartenant à l'intervalle $]0; 5[$.

2. La longueur de la boîte mesure: $16-2 \cdot x$.
La largeur de la boîte mesure: $10-2 \cdot x$.
La hauteur de la boîte mesure x .

Son volume $V(x)$ sera égal à $(16-2 \cdot x)(10-2 \cdot x)x$.

Or:

$$\begin{aligned}
 (16-2 \cdot x)(10-2 \cdot x)x &= (160-32 \cdot x-20 \cdot x+4 \cdot x^2)x \\
 &= (160-52 \cdot x+4 \cdot x^2)x = 160 \cdot x-52 \cdot x^2+4 \cdot x^3
 \end{aligned}$$

3. a. On a:

$$V'(x) = 4 \times 3 \cdot x^2 - 52 \times 2 \cdot x + 160 = 12 \cdot x^2 - 104 \cdot x + 160$$

La fonction V' est définie par un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-104)^2 - 4 \times 12 \times 160 = 10\,816 - 7\,680 = 3\,136$$

On a la simplification: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3\,136} = 56$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\
 &= \frac{-(-104) - 56}{2 \times 12} & &= \frac{-(-104) + 56}{2 \times 12} \\
 &= \frac{104 - 56}{24} & &= \frac{104 + 56}{24} \\
 &= \frac{58}{24} & &= \frac{160}{24} \\
 &= 2 & &= \frac{20}{3}
 \end{aligned}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement, on en déduit le tableau de signe:

x	$-\infty$	2	$\frac{20}{3}$	$+\infty$	
$12 \cdot x^2 - 104 \cdot x + 160$	+	0	-	0	+

- b. Voici le tableau de variations de la fonction V :

x	0	2	5
Variation de V	0	144	0

- c. Ainsi, le volume maximal de la boîte est de 144 cm^3 qui est atteint pour $x=2$. Ainsi, la boîte aura pour dimension:

Longueur: 12 cm ; Largeur: 6 cm ; Hauteur: 2 cm

Correction 9

1. a. L'aire de jeu ayant une aire de 450 m^2 , d'après la formule de l'aire d'un rectangle, on obtient:

$$x \times y = 450, \text{ ce qui permet d'écrire } y = \frac{450}{x}$$

Les côtés du rectangle ne pouvant être nul.

On a imposé que les longueurs de cette aire soit supérieure à 10: $x \geq 10$.

De l'inégalité $y \geq 10$, on déduit:

$$y \geq 10$$

$$\frac{450}{x} \geq 10$$

$$450 \geq x \times 10$$

$$45 \geq x$$

On a alors l'encadrement de x : $10 \geq x \geq 45$.

- b. On remarque facilement que:

$$AB = x + 3 ; BC = y + 6 ; CD = x + 3$$

Ainsi la longueur de la clôture s'exprimera en fonction de x par:

$$L = AB + BC + CD = x + 3 + y + 6 + x + 3$$

$$= 2 \cdot x + y + 12 = 2 \cdot x + \frac{450}{x} + 12$$

2. a. La fonction f est définie et dérivable sur $[10; 45]$ et on a:

$$f'(x) = 2 - \frac{450}{x^2}$$

- b. On a:

$$f'(x) = 2 - \frac{450}{x^2} = \frac{2 \cdot x^2 - 450}{x^2} = \frac{2(x^2 - 225)}{x^2}$$

Le dénominateur de cette fraction étant positif, on en déduit que f' a le même signe que $x^2 - 225$.

En remarquant que $\sqrt{225} = 15$, on a la factorisation suivante $x^2 - 225 = (x+15)(x-15)$. On en déduit le tableau de signes suivant:

x	10	15	45
$x+15$	+		+
$x-15$	-	0	+
x^2-225	-	0	+

- c. On obtient le tableau de variations suivant:

x	10	15	45
Variation de f	77	72	112

3. La longueur de la clôture lorsque la valeur de la fonction f le sera également. D'après le tableau de variations suivant, on obtient la valeur minimale 72 de la fonction f pour $x=15$.

Ainsi le périmètre de la clôture sera minimale lorsque x mesurera 15 m et y mesurera $\frac{450}{15} = 30 \text{ m}$

Correction 10

- La proposition 1 est fausse:

La tangente (T) à la courbe ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 4 passe par les points C et D . Le coefficient directeur de la tangente (T) a pour valeur:

$$\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3 - 0}{2 - 4} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

Ainsi, le nombre dérivé de la fonction f a pour valeur:

$$f'(4) = -\frac{3}{2}$$

- La proposition 2 est fausse :

Le point $B\left(2; \frac{4}{3}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}$:

$$f(2) = \frac{4}{3}$$

Correction 11

- a. Pour x tonnes de croquettes vendues, le montant de la ceste est :

$$R(x) = 1900 \times x$$

- Le bénéfice exprimé en euros lorsque x tonnes de croquettes vendues s'exprime par :

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

$$= 1900 \times x - (x^3 - 105 \cdot x^2 + 3700 \cdot x + 4000)$$

$$= 1900 \cdot x - x^3 + 105 \cdot x^2 - 3700 \cdot x - 4000$$

$$= -x^3 + 105 \cdot x^2 - 1800 \cdot x - 4000$$

- La fonction B' dérivée de la fonction B a pour expression :

$$B'(x) = 3 \times (-1) \cdot x^2 + 2 \times 105 \cdot x - 1800$$

$$= -3 \cdot x^2 + 210 \cdot x - 1800$$

- Ce polynôme du second degré a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 210^2 - 4 \times (-3) \times (-1800)$$

$$= 44\,100 - 21\,600 = 22\,500$$

$$\text{On a la simplification : } \sqrt{\Delta} = \sqrt{22\,500} = 150$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme du second degré admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\ = \frac{-210 - 150}{2 \times (-3)} & = \frac{-210 + 150}{2 \times (-3)} \\ = \frac{-360}{-6} & = \frac{-60}{-6} \\ = 60 & = 10 \end{array}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, le polynôme $-3 \cdot x^2 + 210 \cdot x - 1800$ admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$	10	60	$+\infty$	
$-3 \cdot x^2 + 210 \cdot x - 1800$	-	0	+	0	-

On en déduit le signe de la fonction B' :

x	0	10	60	80	
Signe de $B'(x)$	-	0	+	0	-

- Par la fonction B , on a les images suivantes :

$$\bullet B(0) = -0^3 + 105 \times 0^2 - 1800 \times 0 - 4000$$

$$= 0 + 0 - 0 - 4000 = -4000$$

$$\bullet B(10) = -10^3 + 105 \times 10^2 - 1800 \times 10 - 4000$$

$$= -1000 + 10\,500 - 18\,000 - 4000 = -12\,500$$

$$\bullet B(60) = -60^3 + 105 \times 60^2 - 1800 \times 60 - 4000$$

$$= -216\,000 + 378\,000 - 108\,000 - 4000 = 50\,000$$

$$\bullet B(80) = -80^3 + 105 \times 80^2 - 1800 \times 80 - 4000$$

$$= 512\,000 + 672\,000 - 144\,000 - 4000 = 12\,000$$

On a le tableau de variations :

x	0	10	60	80
Variation de B	-4000		50 000	
		-12 500		12 000

- Pour obtenir un bénéfice maximal, l'entreprise doit vendre 60 tonnes de croquettes. Le bénéfice alors réalisé est de 50 000 €.

Correction 12

- La fonction f admettant un maximum en -2 , il existe un intervalle $]a; b[$ tel que $-2 \in]a; b[$ et :

⇒ la fonction f est croissante sur $[a; -2]$;

⇒ la fonction f est décroissante sur $[-2; b]$.

On en déduit que la fonction dérivée f' de la fonction f a pour signe :

⇒ la fonction f' est positive sur $[a; -2]$;

⇒ la fonction f' est négative sur $[-2; b]$;

Seules les courbes $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_4$ vérifient ces relations.

- Par le même raisonnement et en utilisant le minimum de la fonction f en 3, il existe un intervalle $]c; d[$ tel que $3 \in]c; d[$:

⇒ sur l'intervalle $]c; 3[$, la fonction f' est négative ;

⇒ sur l'intervalle $]3; d[$, la fonction f' est positive.

Parmi les courbes $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_4$, seule la courbe $\mathcal{C}'_1$ vérifie cette propriété.

Ainsi, la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour courbe représentative la courbe $\mathcal{C}'_1$.

Correction 13

- Le dénominateur étant un polynôme du second degré, son discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 4 - 24 = -20 < 0$$

Ce polynôme n'admet aucune racine : le dénominateur de ce quotient ne s'annule jamais.

On a en déduit que la fonction f est définie pour tout nombre réel : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

- L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définie par :

$$u(x) = x^2 - x + 3 \quad ; \quad v(x) = 2x^2 - 2x + 3$$

qui admette pour dérivée :

$$u'(x) = 2x - 1 \quad ; \quad v'(x) = 4x - 2$$

Ainsi, la formule de dérivation du quotient de fonctions donne l'expression de la fonction f' :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\
&= \frac{(2x-1)(2x^2-2x+3) - (x^2-x+3) \times (4x-2)}{(3x^2+2x+1)^2} \\
&= \frac{(4x^3-4x^2+6x-2x^2+2x-3) - (4x^3-2x^2-4x^2+2x+12x-6)}{(3x^2+2x+1)^2} \\
&= \frac{(4x^3-6x^2+8x-3) - (4x^3-6x^2+14x-6)}{(3x^2+2x+1)^2} \\
&= \frac{4x^3-6x^2+8x-3-4x^3+6x^2-14x+6}{(3x^2+2x+1)^2} \\
&= \frac{-6x+3}{(3x^2+2x+1)^2}
\end{aligned}$$

3. a. Le dénominateur étant strictement positif (voir question 1.), le signe de f' ne dépend que de son numérateur. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

- b. L'image de $\frac{1}{2}$ par la fonction f a pour valeur :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 3}{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} + 3} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3}{2 \times \frac{1}{4} - 1 + 3} = \frac{1 - 2 + 12}{4} \\
&= \frac{\frac{11}{4}}{\frac{2}{2}} = \frac{11}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{11}{10}
\end{aligned}$$

On a le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variation de f		1	$\frac{1}{2}$

4. Ainsi, la fonction f admet pour maximum 1, et atteint son maximum pour $x = \frac{1}{2}$.

Correction 14

1. Le dénominateur est un polynôme du second degré ; son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7$$

Le discriminant est strictement négatif ; son dénominateur ne s'annule pas : son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

2. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v où :

$$u(x) = 3x^2 - 2x - 2 \quad ; \quad v(x) = 2x^2 + x + 1$$

qui admettent pour dérivée les fonctions :

$$u'(x) = 6x - 2 \quad ; \quad v'(x) = 4x + 1$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la dérivée f' :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\
&= \frac{(6x-2) \cdot (2x^2+x+1) - (3x^2-2x-2) \cdot (4x+1)}{(2x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{(12x^3+6x^2+6x-4x^2-2x-2) - (12x^3+3x^2-8x^2-2x-8x-2)}{(2x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{(12x^3+2x^2+4x-2) - (12x^3-5x^2-10x-2)}{(2x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{7x^2+14x}{(2x^2+x+1)^2}
\end{aligned}$$

- b. Le signe de la dérivée ne dépend que du signe du numérateur ; on peut factoriser le numérateur :

$$7x^2 + 14x = 7x(x+2)$$

Le signe du coefficient du terme du second degré est négatif ; on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+

Effectuons les calculs suivantes :

$$\bullet f(-2) = \frac{3 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) - 2}{2 \times (-2)^2 + (-2) + 1} = \frac{14}{7} = 2$$

$$\bullet f(0) = \frac{3 \times 0^2 - 2 \times 0 - 2}{2 \times 0^2 + 0 + 1} = \frac{-2}{1} = -2$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
Variation de f		2	-2	$\frac{3}{2}$

3. Puisque $2 > \frac{3}{2}$ et $-2 < -\frac{3}{2}$ et d'après le tableau de variations :

- 2 est la maximum de la fonction f et il est atteint pour $x = -2$;
- -2 est la minimum de la fonction f et il est atteint pour $x = 0$;

Correction 15

1. Le point M a pour abscisse x et appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$; ainsi, le point M a pour coordonnées :

$$M\left(x; \frac{1}{x^2-x+1}\right)$$

Ainsi, le rectangle formé par le point M a pour dimensions x et $\frac{1}{x^2-x+1}$. Son aire a pour valeur :

$$\mathcal{A}(x) = x \times \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{x}{x^2-x+1}$$

2. a. L'expression de la fonction $\mathcal{A}$ est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = x^2 - x + 1$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 2x - 1$$

La fonction $\mathcal{A}$ admet pour dérivée la fonction $\mathcal{A}'$ dont l'expression est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\
 &= \frac{1 \times (x^2 - x + 1) - x \times (2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} \\
 &= \frac{x^2 - x + 1 - 2x^2 + x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2} \\
 &= \frac{1^2 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2 - x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

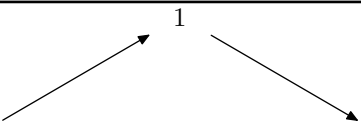
- b. Le dénominateur de ce quotient étant strictement positif sur $\mathbb{R}_+$, on a le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\mathcal{A}'(x)$			$+$	0	$-$

- c. On a la valeur suivante :

$$\mathcal{A}(1) = \frac{1}{1^2 - 1 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Le signe de la fonction dérivée permet de déterminer le sens de variation de la fonction f . On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
Variation de $\mathcal{A}$			

3. Pour que l'aire du rectangle soit maximale, il est nécessaire que le point M ait pour abscisse 1.