Dérivation

I Dérivées des fonctions usuelles

Définition 1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
*Dire que **f est dérivable sur I** signifie que f est dérivable en tout nombre réel $x \in I$*
*La fonction qui à tout réel $x \in I$ associe $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée de f** et est notée **f'***

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$

Démonstration
EXIGIBLE
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = 2x$

Démonstration
EXIGIBLE
Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Exemple 1
Soient les fonctions f, g et h suivantes, déterminer leur dérivées.

$f(x) = 3x$ $\qquad g(x) = x^7$ $\qquad h(x) = \dfrac{1}{x^4}$

....

....

....

Démonstration
EXIGIBLE
Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0
Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$

II Opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I,

$u + v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Démonstration
EXIGIBLE
Montrons que la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = u(x) \times v(x)$ est $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

Exercice 1
Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :
$f(x) = 6x^4$ $\quad g(x) = 5x^2 - 8\sqrt{x}$ $\quad h(x) = (3x-6)(4x^2-3x+1)$ $\quad i(x) = \dfrac{1}{-3x^2+4x+1}$ $\quad j(x) = \dfrac{3x+2}{7-4x}$

Composée de dérivées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$f(ax+b)$	f dérivable sur I	$af'(ax+b)$

Exemple 2
Soit $f(x) = \sqrt{3x-2}$
1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Calculer f'
3) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f
....
....
....
....
....
....

III Cas de la fonction valeur absolue

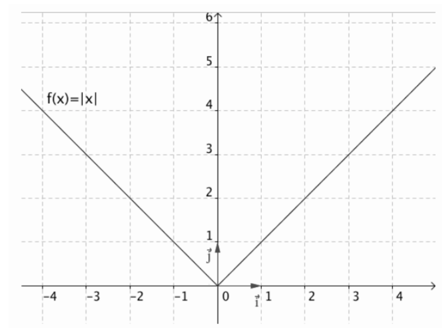
1) Valeur absolue - Rappels

Définition 2
*La **valeur absolue** d'un nombre a est égale au nombre a si $a > 0$, et est égale au nombre $-a$ si $a < 0$*

Définition 3
*La **fonction valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mid x \mid$*

Propriété 1
La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$



Propriété 2
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) Etude de la dérivabilité en 0

Propriété 3
La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0

Démonstration
Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \mid x \mid$

On calcule le taux de variation de f en 0 :
1) Si $h > 0$

2) Si $h < 0$

Donc

Remarque
La fonction valeur absolue est cependant dérivable en tout réel différent de 0

Exercice 2
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mid x - 3 \mid$

La fonction f est elle dérivable en $x = 3$?