CORRECTIONS

Exercices : Dérivation

Correction 1

1. La fonction f est une fonction polynôme qui admet pour dérivée :
$$f'(x) = \big(5{\cdot}x^4\big) + 3{\cdot}\big(2{\cdot}x\big) - 1 + 0$$
$$= 5{\cdot}x^4 + 6{\cdot}x - 1$$

2. La fonction f est une fonction polynômiale qui admet pour dérivée :
$$f'(x) = 2{\cdot}\big(7{\cdot}x^6\big) - \big(2{\cdot}x\big) - 2 + 0$$
$$= 14{\cdot}x^6 - 2{\cdot}x - 2$$

Correction 2

1. La dérivée de la fonction f admet pour expression :
$f'(x) = -3 + 0$

2. La dérivée de la fonction g admet pour expression :
$g'(x) = 4{\times}(2x) + 0 = 8{\cdot}x$

3. La dérivée de la fonction h a pour expression :
$h(x) = 2{\times}(2{\cdot}x) + 3 = 4{\cdot}x + 3$

4. La dérivée de la fonction j admet pour expression :
$j'(x) = 5{\times}(3{\cdot}x^2) - 2{\times}(2{\cdot}x) = 15{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x$

5. La dérivée de la fonction k admet pour expression :
$k'(x) = -2{\times}(2{\cdot}x) + 2 = -4{\cdot}x + 2$

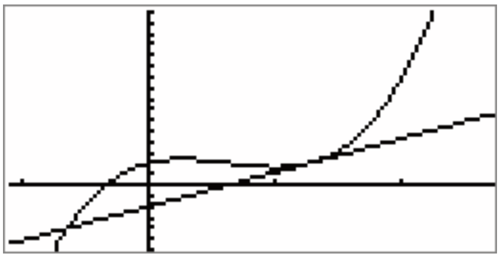
6. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\ell(x) = (3{\cdot}x + 11)(4 - x) = 12x - 3{\cdot}x^2 + 44 - 11x$$
$$= 3{\cdot}x^2 + x + 44$$
Cette expression de la fonction sous la forme d'une somme permet d'obtenir facielement l'expression de sa fonction dérivée :
Ainsi, la dérivée de la fonction ℓ est :
$\ell'(x) = -3{\times}2{\cdot}x + 1 = -6{\cdot}x + 1$

Correction 3

1. a. La fonction dérivée f' de la fonction f admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{1}{2}{\cdot}(3{\cdot}x^2) - \frac{3}{2}{\cdot}(2{\cdot}x) + 1 = \frac{3}{2}{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 1$$
b. On en déduit le nombre dérivée en 2 de la fonction f :
$$f'(2) = \frac{3}{2}{\times}2^2 - 3{\times}2 + 1 = 6 - 6 + 1 = 1$$

2. a. Le point de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 2 a pour coordonnées $\big(2\,;f(2)\big)$.
Déterminons l'image du nombre 2 par la fonction f :
$$f(2) = \frac{1}{2}{\times}2^3 - \frac{3}{2}{\times}2^2 + 2 + 1 = 4 - 6 + 2 + 1 = 1$$
Ainsi, le point A a pour coordonnées $A(2\,;1)$.
b. La formule donnant l'équation réduite d'une tangente permet d'obtenir l'équation réduite de la tangente (T) :
$$y = f'(2){\cdot}\big(x - 2\big) + f(2)$$
$$y = 1{\cdot}\big(x - 2\big) + 1$$
$$y = x - 2 + 1$$
$$y = x - 1$$

3. Voici la représentation des deux courbes de ces fonctions à l'aide d'une calculatrice :



Correction 4

1. La fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :
$f'(x) = 2{\cdot}x - 6$

2. La droite (d) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

L'image du nombre 2 par la fonction f a pour valeur :
$f(2) = 2^2 - 6{\times}2 + 5 = 4 - 12 + 5 = -3$
Ainsi, la droite (d) doit passer par le point de coordonnées $(\,2\,;-3\,)$

Le nombre dérivée de la fonction f en 2 a pour valeur :
$f'(2) = 2{\times}2 - 6 = -2$

Ainsi, la droite (d) admet a son expression de la forme :
$y = -2{\cdot}x + b$ où b est un nombre réel
Le couple $(\,2\,;-3\,)$ doit vérifier cette équation :
$$-3 = -2{\times}2 + b$$
$$b = -3 + 4$$
$$b = 1$$
L'équation de la droite (d) est : $y{=}-2{\cdot}x{+}1$

3. La droite (Δ) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5.

L'image du nombre 5 par la fonction f a pour valeur :
$f(5) = 5^2 - 6{\times}5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0$
Ainsi, la droite (d) doit passer par le point de coordonnées $(5\,;0)$

Le nombre dérivée de la fonction f en 2 a pour valeur :
$f'(5) = 2{\times}5 - 6 = 4$

Ainsi, la droite (d) admet a son expression de la forme :
$y = 4x + b$
Le couple $(5\,;0)$ doit vérifier cette équation :
$$0 = 4{\times}5 + b$$
$$b = -20$$
L'équation de la droite (d) est : $y{=}4{\cdot}x{-}20$

4. Les deux droites s'interceptent en un point dont l'abscisse vérifie l'équation :
$$-2{\cdot}x + 1 = 4{\cdot}x - 20$$
$$-2{\cdot}x - 4{\cdot}x = -20 - 1$$
$$-6{\cdot}x = -21$$
$$x = \frac{-21}{-6}$$
$$x = \frac{7}{2}$$
En utilisant la droite (Δ), l'ordonnée du point d'abscisse $\dfrac{7}{2}$ vaut :
$$y = 4{\cdot}x - 20 = 4{\times}\frac{7}{2} - 20 = 14 - 20 = -6$$

Ainsi, le point d'intersection des droites (d) et (Δ) a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{2}\,;-6\right)$

Correction 5

1. Compléter le tableau suivant :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3{\cdot}x^2-2$	$8-x$	$6{\cdot}x$	-1
$\dfrac{1}{x}$	x^2-1	$-\dfrac{1}{x^2}$	$2x$
$5{\cdot}x+\dfrac{2}{x}$	$3-2{\cdot}x^3$	$5-\dfrac{2}{x^2}$	$-6{\cdot}x^2$
x	$\sqrt{x}$	1	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. a. La fonction f s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée s'écrit sous la forme :

$$f'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)=6{\cdot}x{\cdot}(8-x)+(3{\cdot}x^2-2){\cdot}(-1)$$
$$=48{\cdot}x-6{\cdot}x^2-3{\cdot}x^2+2=-9{\cdot}x^2+48{\cdot}x+2$$

b. La fonction g s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée s'écrit sous la forme :

$$g'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)$$
$$=-\frac{1}{x^2}{\cdot}(x^2-1)+\frac{1}{x}{\cdot}2x=\frac{-(x^2-1)}{x^2}+2$$
$$=\frac{-x^2+1+2{\cdot}x^2}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$$

c. La fonction h s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée s'écrit sous la forme :

$$h'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)$$
$$=\left(5-\frac{2}{x^2}\right)(3-2x^3)+\left(5x+\frac{2}{x}\right)(-6x^2)$$
$$=15-10x^3-\frac{6}{x^2}+4x-30x^3-12x$$
$$=-40x^3-8x+15-\frac{6}{x^2}$$

d. La fonction j s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée s'écrit sous la forme :

$$j'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)=1{\cdot}\sqrt{x}+x{\cdot}\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$
$$=\sqrt{x}+\frac{x}{2{\cdot}\sqrt{x}}=\frac{2{\cdot}\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2{\cdot}\sqrt{x}}+\frac{x}{2{\cdot}\sqrt{x}}=\frac{2{\cdot}x+x}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$
$$=\frac{3{\cdot}x}{2{\cdot}\sqrt{x}}=\frac{3{\cdot}\sqrt{x}{\cdot}\sqrt{x}}{2{\cdot}\sqrt{x}}=\frac{3{\cdot}\sqrt{x}}{2}$$

Correction 6

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v définies par :

$u(x)=3-x\quad;\quad v(x)=\dfrac{1}{x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x)=-1\quad;\quad v'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)$$
$$=-1\times\frac{1}{x}+(3-x){\cdot}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-1}{x}-\frac{3-x}{x^2}$$
$$=\frac{-x}{x^2}-\frac{3-x}{x^2}=\frac{-x-(3-x)}{x^2}=\frac{-x+x-3}{x^2}=\frac{-3}{x^2}$$

2. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v définies par :

$u(x)=x^2-3\quad;\quad v(x)=\sqrt{x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x)=2x\quad;\quad v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :

$$g'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)=2{\cdot}x{\cdot}\sqrt{x}+(x^2-3){\cdot}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{2{\cdot}x{\cdot}\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{x^2-3}{2\sqrt{x}}=\frac{4{\cdot}x^2}{2\sqrt{x}}+\frac{x^2-3}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{4{\cdot}x^2+x^2-3}{2\sqrt{x}}=\frac{5{\cdot}x^2-3}{2\sqrt{x}}$$

Correction 7

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des deux fonctions u et v définies par :

$u(x)=2{\cdot}x-3\quad;\quad v(x)=\sqrt{x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x)=2\quad;\quad v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)=2\times\sqrt{x}+(2x-3){\cdot}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$=2{\cdot}\sqrt{x}+\frac{2{\cdot}x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}{\cdot}2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{4{\cdot}x}{2\sqrt{x}}+\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{4{\cdot}x+(2x-3)}{2\sqrt{x}}=\frac{6{\cdot}x-3}{2\sqrt{x}}$$

2. a. Pour déterminer l'équation réduite de la tangente (T) au point d'abscisse 1. Calculons l'image de 1 par la fonction f et le nombre dérivée de la fonction f en 1 :

- $f(1)=(2\times1-3){\cdot}\sqrt{1}=\big(2-3\big)\times1=-1$
- $f'(1)=\dfrac{6\times1-3}{2\sqrt{1}}=\dfrac{6-3}{2\times1}=\dfrac{3}{2}$

La tangente (T) admet pour expression :

$$y=f'(1){\cdot}\big(x-1\big)+f(1)$$
$$y=\frac{3}{2}{\cdot}(x-1)+(-1)$$
$$y=\frac{3}{2}{\cdot}x-\frac{3}{2}-1$$
$$y=\frac{3}{2}{\cdot}x-\frac{5}{2}$$

b. Traçons la courbe représentative de la tangente (T). Pour cela considérons les deux points :

- Considérons M le point de (T) ayant pour abscisse 1. Les coordonnées de M sont de la forme $\big(1\,;yM\big)$:

$y_M = \dfrac{3}{2}\cdot x_M - \dfrac{5}{2}$

$y_M = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}$

$y_M = -\dfrac{2}{2}$

$y_M = -1$

Le point M a pour coordonnées $(1\,;-1)$

- Considérons N le point de (T) ayant pour abscisse 3. Les coordonnées de N sont de la forme $(3\,;y_N)$:

$y_N = \dfrac{3}{2}\cdot 3 - \dfrac{5}{2}$

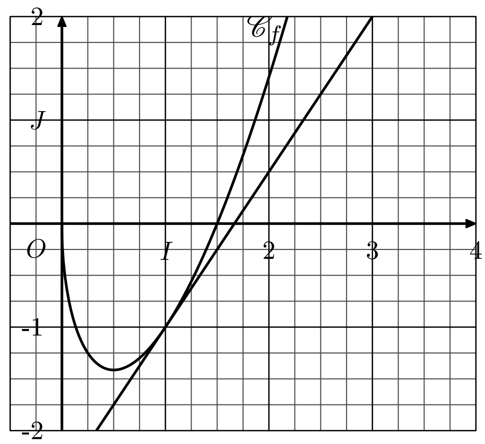
$y_N = \dfrac{9}{2} - \dfrac{5}{2}$

$y_N = \dfrac{4}{2}$

$y_N = 2$

Le point N a pour coordonnées $(3\,;2)$

Voici la représentation de la tangente (T) :



Correction 8

1. Par identification du numérateur et dénominateur de chaque quotient, voici le tableau complété :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3-2\cdot x$	$x+1$	-2	1
$x^2+4\cdot x-1$	$2\cdot x-1$	$2\cdot x+4$	2
4	$x^2-2\cdot x+3$	0	$2\cdot x-2$

2. - La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{-2\cdot(x+1)-(3-2\cdot x)\times 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-2\cdot x-2-3+2\cdot x}{(x+1)^2} = \frac{-5}{(x+1)^2}$$

- La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{(2\cdot x+4)(2x-1)-(x^2+4\cdot x-1)\times 2}{(2\cdot x-1)^2}$$

$$= \frac{(4\cdot x^2-2x+8\cdot x-4)-(2\cdot x^2+8\cdot x-2)}{(2\cdot x-1)^2}$$

$$= \frac{4\cdot x^2-2\cdot x+8\cdot x-4-2\cdot x^2-8\cdot x+2}{(2\cdot x-1)^2} = \frac{2\cdot x^2-2\cdot x-2}{(2\cdot x-1)^2}$$

- L'expression de la dérivée f' est donnée par la formule :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{0\cdot(x^2-2\cdot x+3)-4\cdot(2\cdot x-2)}{(x^2-2\cdot x+3)^2}$$

$$= \frac{-8\cdot x+8}{(x^2-2\cdot x+3)^2}$$

Correction 9

1. Pour qu'un quotient soit défini, il faut que son dénominateur soit non-nul.

Etudions le polynôme $x^2-5\cdot x+6$. Ce polynôme admet pour discriminant :

$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-5)^2-4\times 1\times 6 = 25-24 = 1$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, ce polynôme admet les racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-5)-1}{2\times 1} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-5)+1}{2\times 1} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

On en déduit l'ensemble de définition de la fonction h :

$\mathcal{D}_h = \mathbb{R}\backslash\{2\,;\,3\}$

2. L'expression de la fonction h est donnée sous la forme d'un quotient où :

$u(x) = x^2-2\cdot x+1 \quad ; \quad v(x) = x^2-5\cdot x+6$

qui admettent pour dérivée les deux fonctions :

$u'(x) = 2\cdot x-2 \quad ; \quad v'(x) = 2\cdot x-5$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction h' :

$$h'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{(2x-2)(x^2-5\cdot x+6)-(x^2-2\cdot x+1)(2\cdot x-5)}{(x^2-5\cdot x+6)^2}$$

$$= \frac{2x^3\text{-}10x^2+12x-2x^2+10x\text{-}12\text{-}(2x^3\text{-}5x^2\text{-}4x^2+10x+2x\text{-}5)}{(x^2\text{-}5x+6)^2}$$

$$= \frac{2\cdot x^3-12\cdot x^2+22\cdot x-12-(2\cdot x^3-9\cdot x^2+12\cdot x-5)}{(x^2-5\cdot x+6)^2}$$

$$= \frac{2\cdot x^3-12\cdot x^2+22\cdot x-12-2\cdot x^3+9\cdot x^2-12\cdot x+5)}{(x^2-5\cdot x+6)^2}$$

$$= \frac{-3\cdot x^2+10\cdot x-7}{(x^2-5\cdot x+6)^2}$$

Correction 10

- La fonction f est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :

$u(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad v(x) = x+1$

qui admettent pour dérivée les expressions :

$u'(x) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \quad ; \quad v'(x) = 1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x+1) - \sqrt{x}\times 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1-2\cdot x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{-x+1}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-x+1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}\cdot(x+1)^2}$$

- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$ et est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. Son expression est donnée sous la forme du produit des deux fonctions u et v définie par :
  $u(x) = x^2 - 3 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$
  qui admettent pour dérivée :
  $u'(x) = 2\cdot x \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

  La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction g :

  $$g'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)$$
  $$= 2\cdot x\times\sqrt{x} + (x^2-3)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\cdot x\sqrt{x} + \frac{x^2-3}{2\sqrt{x}}$$
  $$= \frac{2\cdot x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3}{2\sqrt{x}} = \frac{4\cdot x\times x}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3}{2\sqrt{x}}$$
  $$= \frac{4\cdot x^2 + x^2 - 3}{2\sqrt{x}} = \frac{5\cdot x^2-3}{2\sqrt{x}}$$

Correction 11

1. La fonction f est définie par :
   $f(x) = (x^2 - 3\cdot x)\cdot\sqrt{x}$

   L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

   $u(x) = x^2 - 3\cdot x \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$
   qui admettent pour dérivée :
   $u'(x) = 2\cdot x - 3 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

   La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = (2\cdot x - 3)\cdot\sqrt{x} + (x^2 - 3\cdot x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{(2\cdot x-3)\cdot\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-3\cdot x}{2\sqrt{x}} = \frac{2\cdot x\cdot(2\cdot x-3) + x^2 - 3\cdot x}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{4\cdot x^2 - 6\cdot x + x^2 - 3\cdot x}{2\sqrt{x}} = \frac{5\cdot x^2 - 9\cdot x}{2\sqrt{x}}$$

2. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme d'un quotient des deux fonctions u et v définies par :
   $u(x) = x + 1 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$
   qui admettent pour dérivée :
   $u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

   La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée g' :

$$g'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{1\cdot\sqrt{x} - (x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{\sqrt{x} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2\cdot x}{2\sqrt{x}} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}$$
$$= \frac{\frac{2\cdot x - (x+1)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{x} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$