Suites arithmétiques et géométriques

I Suites arithmétiques

1) Définition et propriétés

Définition 1
Relation de récurrence
*Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un réel $\boldsymbol{r}$, appelé la **raison** tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:* $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$

Exemple 1
Soit une suite (u_n) arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 6$
$u_1 =$ ....+ ....= ....+ ....= ....
$u_2 =$ ....+ ....= ....+ ....= ....
$u_3 =$ ....+ ....= ....+ ....= ....

Chaque terme est obtenu en ....au terme précédent

Remarque
D'après la définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$ ce qui nous amène à la propriété suivante :

Propriété 1
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = r}$ alors (u_n) est une suite arithmétique de raison r

Exemple 2
1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 2n^2 + 1$ est elle arithmétique ?

....
Donc (u_n) ....

2) La suite (v_n) définie par : $v_n = 5 - 4n$ est elle arithmétique ?

....
Donc (v_n) ....

Propriété 2
Formule explicite
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$,
1) $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$
2) $\boldsymbol{u_n = u_p + (n - p)r}$

Démonstration
EXIGIBLE

....

....

....

....

....

....

....

Remarque
On utilise la deuxième formule de la propriété quand par exemple on ne connait pas u_0 mais un autre terme de la suite comme u_3, u_8 etc.

Exercice 1
On considère la suite arithmétique (u_n) telle que $u_4 = 18$ et $u_{11} = 53$.
1) Déterminer la raison r et le premier terme de cette suite

....

....

....

....

2) Exprimer u_n en fonction de n

....

....

2) Variations

Propriété 3
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- Si $\boldsymbol{r > 0}$ alors la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ **est croissante**
- Si $\boldsymbol{r < 0}$ alors la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ **est décroissante**

Démonstration

....

....

....

3) Somme de termes consécutifs

Propriété 4
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\boldsymbol{1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$

Démonstration
EXIGIBLE

....

....

....

....

....

Exemple 3
Calculer les sommes suivantes :
$S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + 216$

....

....

$S_2 = 16 + 17 + 18 + ... + 112$

....

....

....

$S_3 = 40 + 45 + 50 + ... + 355$

....

....

....

....

II Suites géométriques

1) Définition et propriétés

Définition 2
Relation de récurrence
*Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** signifie qu'il existe un réel $\boldsymbol{q}$, appelé la **raison** tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:* $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n \times q}$

Exemple 4
Soit une suite (u_n) géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$
$u_1 =$ ....$\times$ ....$=$ ....$\times$ ....$=$ ....
$u_2 =$ ....$\times$ ....$=$ ....$\times$ ....$=$ ....
$u_3 =$ ....$\times$ ....$=$ ....$\times$ ....$=$ ....

Chaque terme est obtenu en ....au terme précédent

Remarque
D'après la définition, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ ce qui nous amène à la propriété suivante :

Propriété 5
Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$:
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q}$ alors (u_n) est une suite géométrique de raison q

Exemple 5
La suite (u_n) définie par : $u_n = 4 \times 3^n$ est elle géométrique ?

....
Donc (u_n) ....

Propriété 6
Formule explicite
Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$,
1) $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$
2) $\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$

Démonstration
EXIGIBLE

....

....

....

....

....

....

....

Remarque
On utilise la deuxième formule de la propriété quand par exemple on ne connait pas u_0 mais un autre terme de la suite comme u_3, u_8 etc.

Exercice 2
On considère la suite géométrique (u_n) telle que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.
1) Déterminer la raison q et le premier terme de cette suite

....

....

....

....

2) Exprimer u_n en fonction de n

....

....

2) Variations

Propriété 7
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.
Si $\boldsymbol{u_0 > 0}$:
- Si $\boldsymbol{q > 1}$ alors la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ **est croissante**
- Si $\boldsymbol{0 < q < 1}$ alors la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ **est décroissante**

Si $\boldsymbol{u_0 < 0}$:
- Si $\boldsymbol{q > 1}$ alors la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ **est décroissante**
- Si $\boldsymbol{0 < q < 1}$ alors la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ **est croissante**

Démonstration

....

....

....

....

Remarque
Si $\boldsymbol{q < -1}$ alors (u_n) n'est pas monotone

3) Somme de termes consécutifs

Propriété 8
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$, alors $\boldsymbol{1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$

Démonstration
EXIGIBLE

....

....

....

....

....

Exemple 6
1) Calculer la somme suivante
$S_1 = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{11}$

....

....

2) Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$.
Calculer $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_9$

....

....

....

....

....